



SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA



Teorie della Relatività RS & RG

Carlo Cosmelli
Dipartimento di Fisica

PdF

2023

DIPARTIMENTO DI FISICA



SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Il XX secolo, nascono due nuove teorie fisiche

1900: Lord Kelvin all'Associazione britannica per il progresso della Scienza dice...

E invece no! Tante, troppe, cose non tornavano.
Nel XX secolo nascono due nuove teorie:

Le Teorie della Relatività

Create da una sola persona,
Albert Einstein,
in due anni precisi:

- ❖ La Relatività speciale nel **1905**
- ❖ La Relatività generale nel **1916**

La Meccanica Quantistica

Creata a partire dal **1900** fino
al **1927** da Bohr, Planck, Born,
Pauli, Einstein, De Broglie,
Dirac, Heisenberg,
Schrödinger, von Neumann...
Ampliata nel 1940, 1986,
2012...



Facciamo il punto della situazione 1

- ❖ 1600/1700 (ri)nasce la scienza. Nasce la scienza moderna
 - ❖ La Meccanica: Galileo, Newton...
 - ❖ «sensate **esperienze**», «necessarie dimostrazioni», «provare e riprovare».
- ❖ 1824... L'energia... la Termodinamica ci fornisce la direzione dei fenomeni naturali. Il Tempo.
- ❖ La seconda metà del XIX secolo:
 - ❖ 1859 C. Darwin scrive "*L'origine delle specie*" – nasce la teoria dell'evoluzione,.
 - ❖ 1863 Möbius: l'anello ad una sola superficie (... J. S. Bach)
 - ❖ 1864 Maxwell, Faraday...: Elettricità + Magnetismo = nasce l'elettromagnetismo (onde e.m. con velocità c)
 - ❖ 1866 Mendel: nasce la genetica
 - ❖ 1869 Mendeleev – Il sistema periodico degli elementi.
 - ❖ 1874 Scade il brevetto sul telefono di Meucci.
 - ❖ 1874...1927 Parigi, Salon des Indépendantes: Braque, Cezanne, Duchamp, Léger, Matisse, Van Gogh.
 - ❖ 1887 Michelson & Morley provano a misurare **l'etere: ...che non c'è (?)**.
 - ❖ 1895 I fratelli Lumière – nasce il Cinema.
 - ❖ 1895 Marconi: nasce la radio



Da dove partiva la scienza nel 1900

- ❖ Il nostro universo:
 - Esiste lo Spazio Assoluto → Euclideo.
 - Esiste il Tempo assoluto (indipendente dallo Spazio).
 - Entrambi isotropi e omogenei.
 - Vale la Relatività galileiana (vedremo meglio dopo).
 - Valgono i Principi della Dinamica (Newton).
 - Se ho molte particelle: Termodinamica.
 - Esistono due forze: gravitazionale & elettrica/magnetica.
- ❖ Leggi deterministiche, o probabilistiche per i sistemi complicati (per mancanza di conoscenza oppure per ragioni intrinseche) →
- ❖ Per definire lo stato di un sistema mi basterebbe sapere: [posizione e velocità] + [massa e carica elettrica].



INDETERMINAZIONE CLASSICA

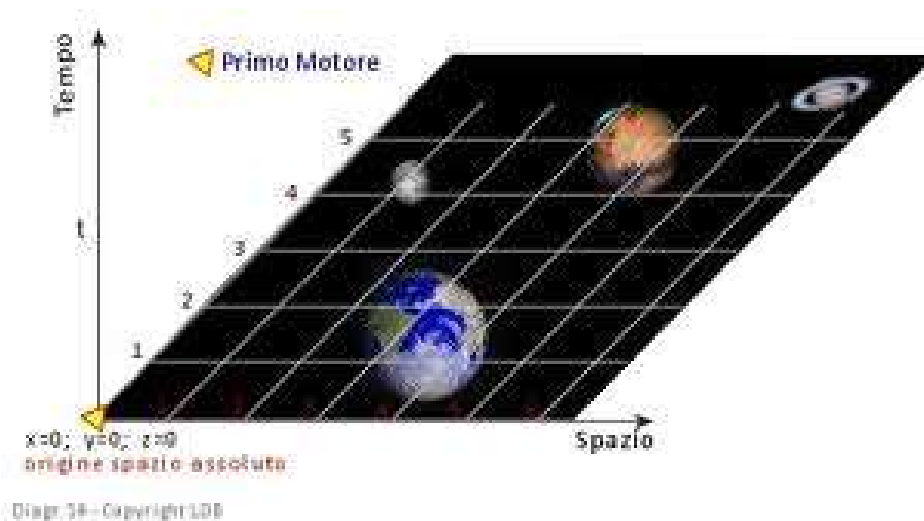
- P. S. Laplace 1776: le certezze.
- L. Boltzmann 1897: l'incertezza 1.
- H. Poincaré 1903: l'incertezza 2.
- E. N. Lorentz 1963: il caos deterministico.



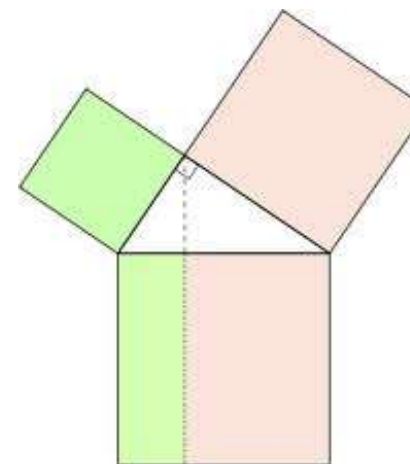
Lo spazio e il tempo di Galileo e di Newton (fino al 1905)



Lo spazio è assoluto: «Lo spazio assoluto, per sua natura senza relazione ad alcunché di esterno, rimane sempre uguale ed immobile» [I. Newton, *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, 1687]



Lo spazio è Euclideo,
è uno spazio piatto:



Il Tempo è assoluto: «Il tempo assoluto, vero, matematico, in sé e per sua natura senza relazione ad alcunché di esterno, scorre uniformemente, e con altro nome è chiamato durata» [I. Newton]



**Il Tempo e lo Spazio
sono assoluti e
indipendenti**

Lo spazio e il tempo di Newton (fino al 1905)



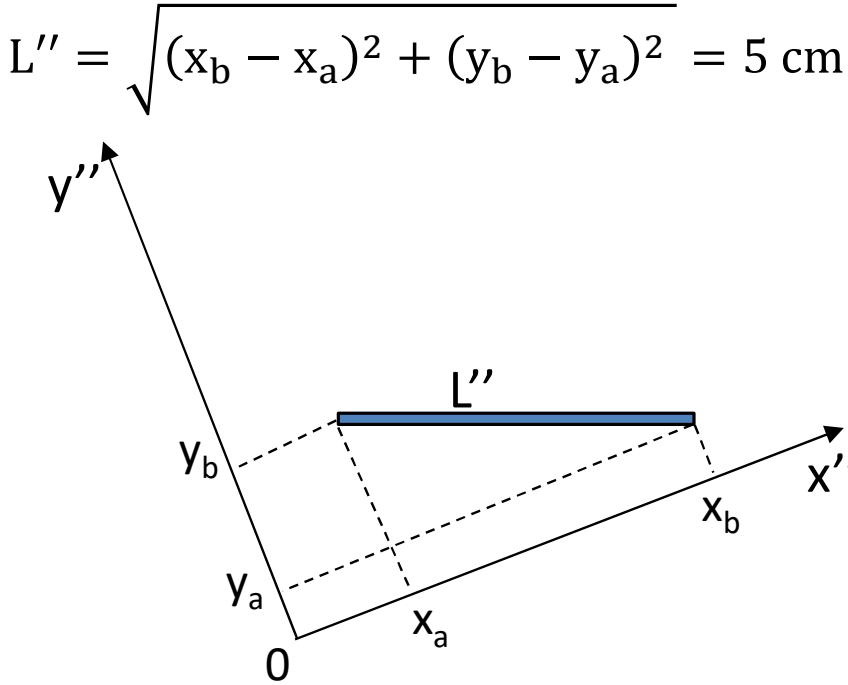
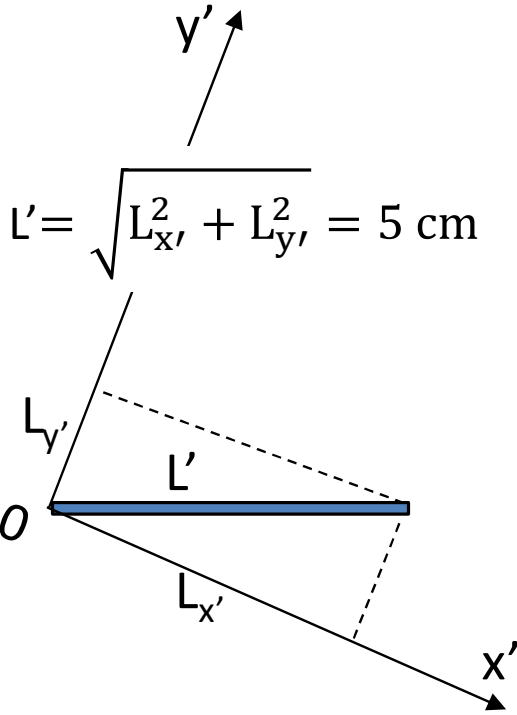
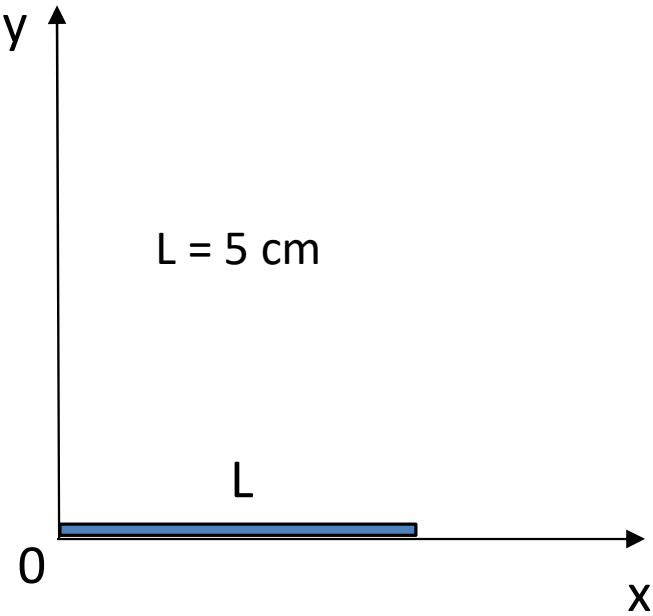
- I. Il tempo assoluto, vero, matematico, in sé e per sua natura senza relazione ad alcunché di esterno, scorre uniformemente, e con altro nome è chiamato durata; quello relativo, apparente e volgare, è una misura (accurata oppure approssimativa) sensibile ed esterna della durata per mezzo del moto, che comunemente viene impiegata al posto del vero tempo: tali sono l'ora, il giorno, il mese, l'anno.
- II. Lo spazio assoluto, per sua natura senza relazione ad alcunché di esterno, rimane sempre uguale ed immobile; lo spazio relativo è una dimensione mobile o misura dello spazio assoluto, che i nostri sensi definiscono in relazione alla sua posizione rispetto ai corpi, ed è comunemente preso come lo spazio immobile; così la dimensione di uno spazio sotterraneo o aereo o celeste viene determinata dalla sua posizione rispetto alla terra. Lo spazio assoluto e lo spazio relativo sono identici per grandezza e specie, ma non sempre permangono identici quanto al numero. Infatti se la Terra, per esempio, si muove, lo spazio della nostra aria, che relativamente alla Terra rimane sempre identico, sarà ora una parte dello spazio assoluto attraverso cui l'aria passa, ora un'altra parte di esso; e così muterà assolutamente in perpetuo.
- III. Il luogo è la parte dello spazio occupata dal corpo, e in relazione allo spazio può essere assoluto o relativo. [...]
- IV. Il moto assoluto è la traslazione del corpo da un luogo assoluto in un luogo assoluto, il relativo da un luogo relativo in un luogo relativo. [...]
- Definiamo, infatti, tutti i luoghi dalle distanze e dalle posizioni delle cose rispetto a un qualche corpo, che assumiamo come immobile; ed in seguito con riferimento ai luoghi predetti valutiamo tutti i moti, in quanto consideriamo i corpi come trasferiti da quei medesimi luoghi in altri. Così, invece dei luoghi e dei moti assoluti usiamo i relativi; né ciò riesce scomodo nelle cose umane: ma nella filosofia occorre astrarre dai sensi.

I. Newton, *Principi matematici della filosofia naturale*, 1687, UTET, Torino, 1965, pagg. 104-108, 110

Spazio assoluto: cosa vuol dire?

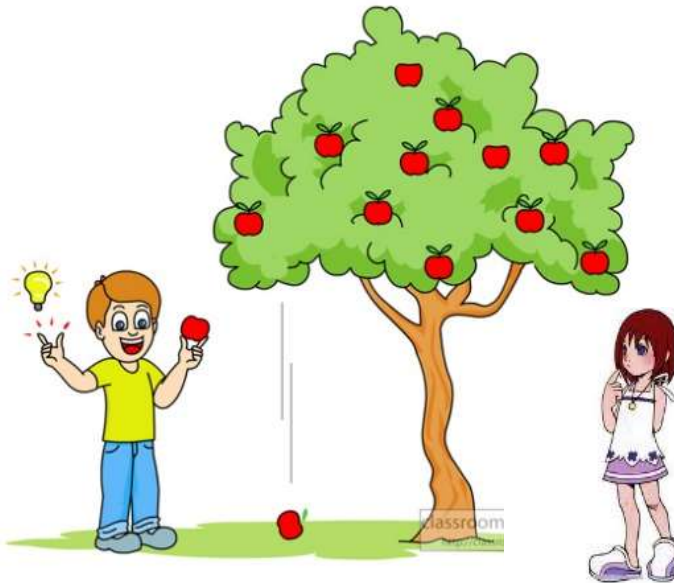



❖ La lunghezza di un oggetto è indipendente da chi la misura





❖ E questo vale anche se chi fa la misura si sta muovendo, le formule sono solo più complicate



Tempo assoluto: cosa vuol dire?




 $t = 0,8 \text{ s}$

QUI



 $t' = 0,8 \text{ s}$
LÀ



 $t' = 0,8 \text{ s}$
LÀ

Il tempo misurato (la durata della caduta) è lo stesso per tutti gli osservatori, scorre uniformemente in tutto l'universo indipendentemente dalla posizione.



⌘ Il Principio di Relatività di Galileo (l'invarianza):

Le leggi della Fisica hanno la stessa forma in tutti i sistemi di riferimento inerziali.

(Galileo Galilei, Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo, 1632.)

***Cosa è un Sistema di Riferimento? SdR
E un SdR inerziale?***

Alcuni termini importanti per capire la relatività, quella di Galileo e quella di Einstein



Sistemi di riferimento - **Trasformazione di coordinate**

Il concetto di **"evento"**: **Io** sto **qua** e **ora** faccio cadere questa pallina

- **Sistemi di riferimento**

- Come faccio a dire a qualcuno **DOVE** sono? Cosa vuol dire **qua**?
- Come faccio a dire **QUANDO** avviene un certo evento? Cosa vuol dire **ora**?

- **Trasformazione di coordinate:**

- Se conosco la **posizione** di un oggetto in un certo sistema di riferimento, qual è la posizione dello stesso oggetto in un altro sistema di riferimento?
- A che **tempo** avviene un certo evento in un altro sistema di riferimento?

Che cos'è un sistema di riferimento (nello spazio).1



Per misurare la posizione di un oggetto nello spazio serve un **Sistema di riferimento**: un'origine, degli assi, dei «righelli»

Esempio (quando ho scritto questa trasparenza):

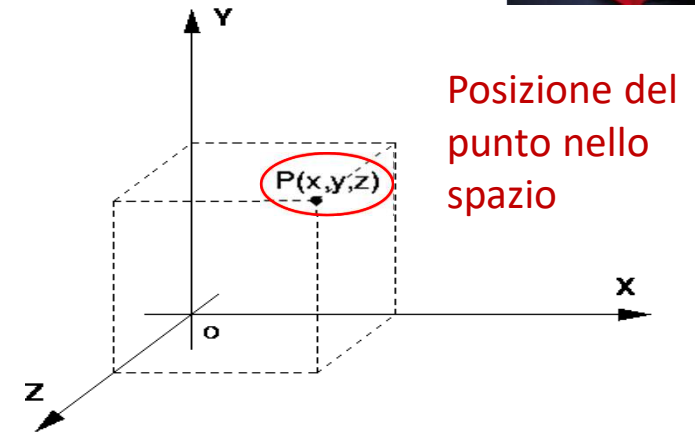
Io sto qua: dietro una scrivania, nel palazzo del Rettorato dell'Università «Sapienza», a Roma...ma in pratica cosa posso dire?

Costruiamo un sistema di riferimento, serve:

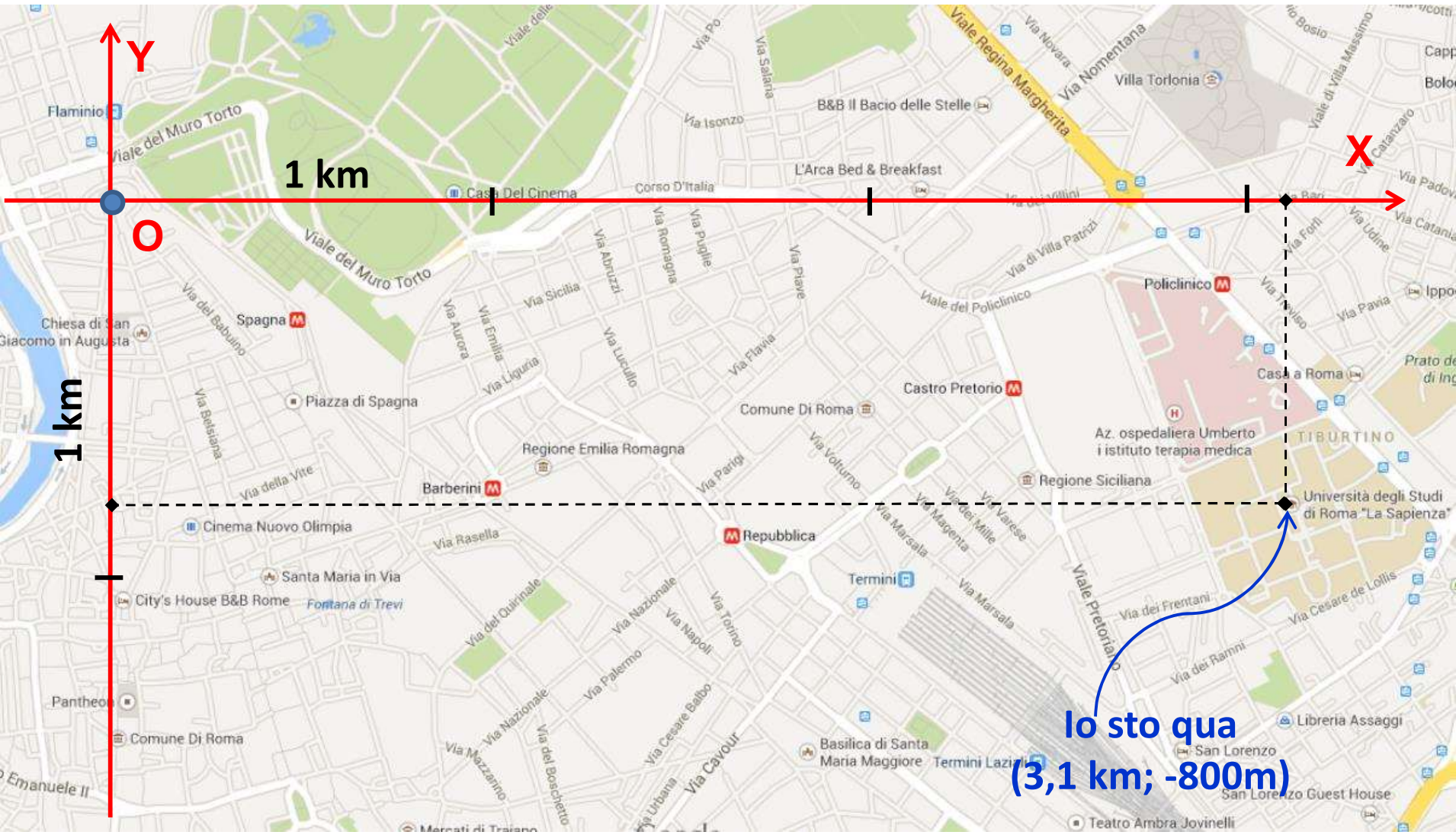
Un' **Origine** (Roma, Piazza del Popolo)

Degli **assi**: due, perpendicolari, OVEST-EST e SUD-NORD

Dei **righelli rigidi** sugli assi (divisioni per leggere la posizione): ogni chilometro, per esempio.



Ecco il mio sistema di riferimento (nello spazio), quando ho fatto questa piantina





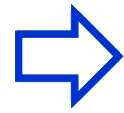
Ecco il mio sistema di riferimento (nello spazio-tempo). 3





Sistemi di riferimento **inerziali**

Esistono dei sistemi di riferimento particolari...
I sistemi di riferimento inerziali



Sono quelli in cui vale il **principio d'inerzia ... il secondo principio della dinamica: $F=ma$**

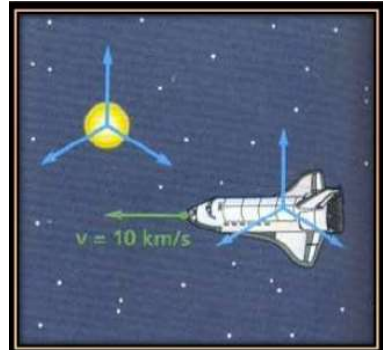
Esempi...

Un Sistema con il centro nel sole e gli assi che puntano verso tre stelle molto lontane è *abbastanza* inerziale



[Il sistema delle stelle fisse utilizzato da Galileo e da Newton]

Un sistema che si muove a velocità costante rispetto ad un altro sistema inerziale



Esempi di sistemi NON inerziali:

- Un aereo che accelera al decollo.
- Un'automobile che frena.
- Una giostra che ruota.

Nei sistemi INERZIALI posso misurare le forze...applicare **sempre** i principi della fisica...calcolare cosa succede, **fare previsioni.**

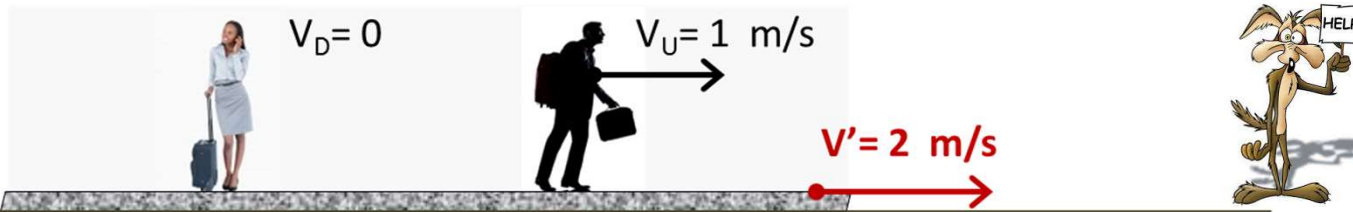


La relatività di Galileo 2:

⌘ Il Principio di Relatività di Galileo (l'invarianza):

Le leggi della Fisica hanno la stessa forma in tutti i sistemi di riferimento inerziali.
(Galileo Galilei, Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo, 1632.)

⌘ **La legge della somma delle velocità di Galileo:** Wile Coyote, che sta fermo rispetto al nastro trasportatore, misurerà la velocità delle persone sul nastro trasportatore + la velocità del nastro che trasporta le persone.

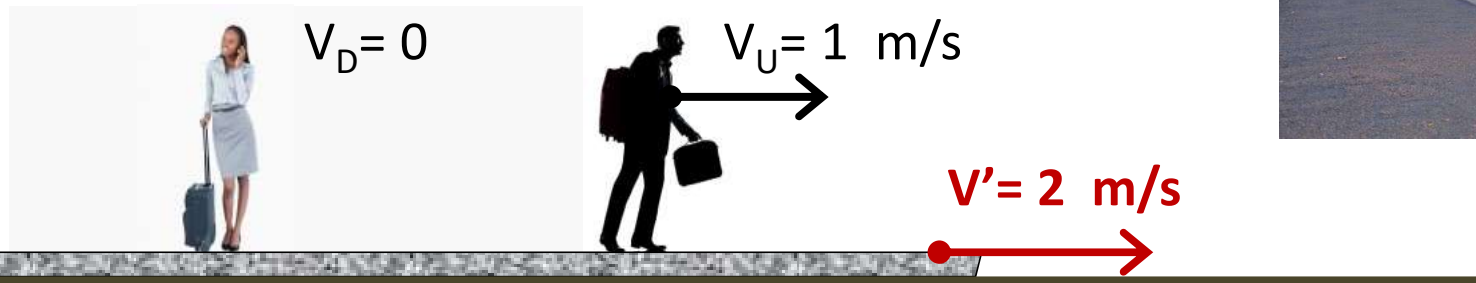


$$V'_{Don} = V_D + V' = 2 \text{ m/s}$$

$$V'_{Uomo} = V_D + V' = 3 \text{ m/s}$$

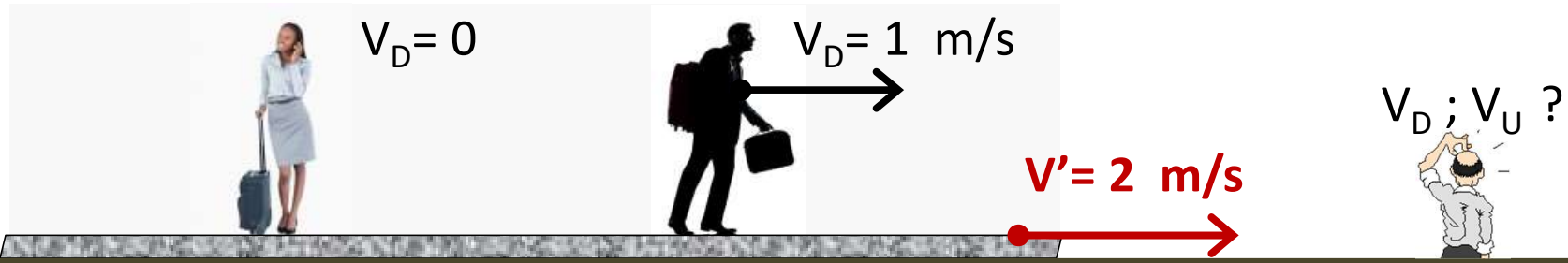
La luce?

- Come si compongono le velocità secondo Galileo.



- Il nastro trasportatore si muove con velocità **$V' = 2 \text{ m/s}$, rispetto al terreno.**
- La signora sta ferma sul nastro; **rispetto al nastro ha una velocità $V_D = 0 \text{ m/s}$**
- Il signore si muove sul nastro; **rispetto al nastro ha una velocità $V_U = 1 \text{ m/s}$**

La composizione delle velocità secondo Galileo



- Il nastro trasportatore si muove con velocità $V' = 2 \text{ m/s}$, rispetto al terreno.
- La signora sta ferma sul nastro, rispetto al nastro ha una velocità $V_D = 0 \text{ m/s}$
- Il signore si muove sul nastro, rispetto al nastro ha una velocità $V_U = 1 \text{ m/s}$

Che velocità hanno le due persone rispetto ad un osservatore fermo sul terreno?

Somma di velocità secondo Galileo (vedi pagina successiva):

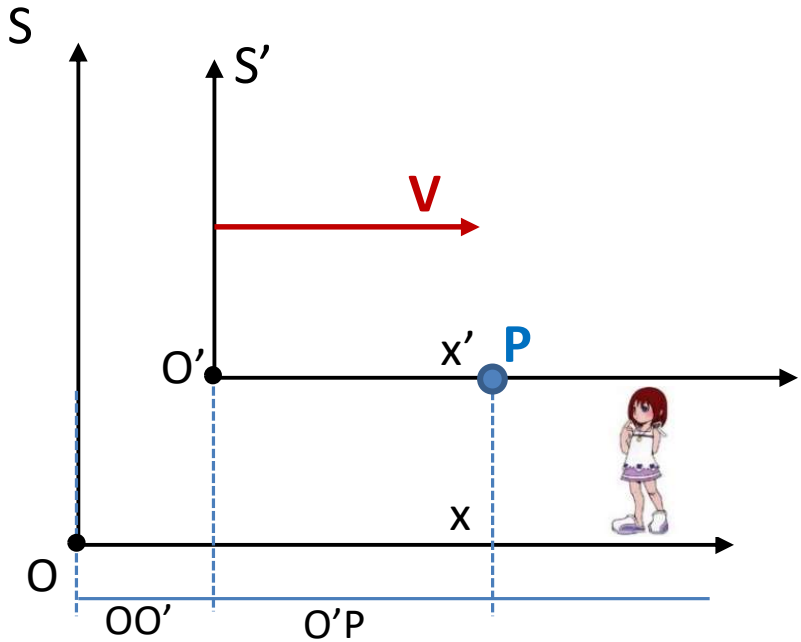
$V_{D/U} \text{ (terreno)} = V_{D/U} \text{ (rispetto al nastro)} + V \text{ (nastro)}$, quindi:

$$V_D \text{ (terreno)} = V_D \text{ (rispetto al nastro)} + V \text{ (nastro)} = 0 + 2 = 2 \text{ m/s}$$

$$V_U \text{ (terreno)} = V_U \text{ (rispetto al nastro)} + V \text{ (nastro)} = 1 + 2 = 3 \text{ m/s}$$



Somma di velocità 1



$S(O,x)$: è il sistema «fermo». Dove sta Alice

$S'(O',x')$: è il sistema in moto rispetto ad S con velocità V .

x e x' sono le posizioni del punto P misurate in S e in S' .

$$\overline{OP} = \overline{OO'} + \overline{O'P} \quad \text{(Spazio assoluto)}$$

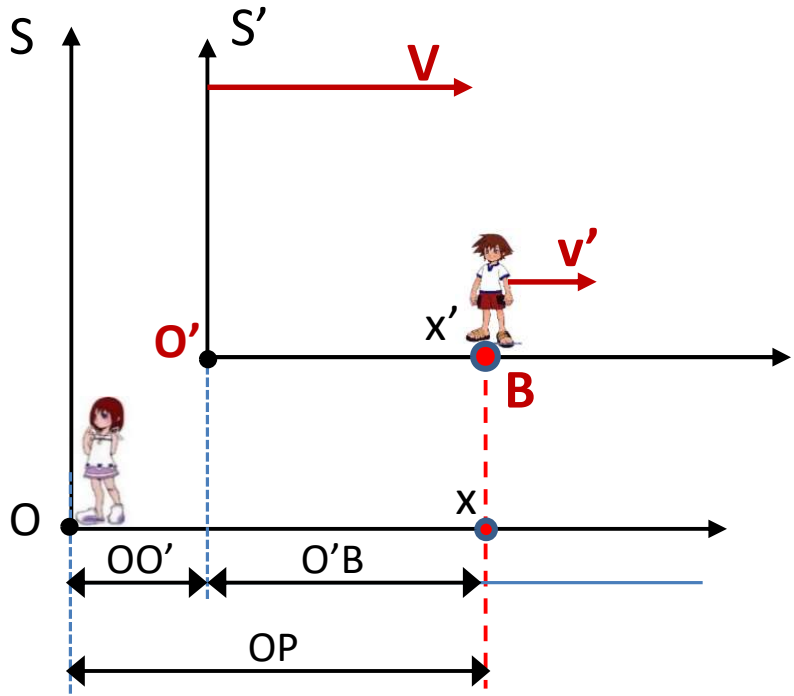
$$x = Vt + x' = x' + Vt$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt} + V, \text{ ma: } \mathbf{t = t' ! \text{ (Tempo assoluto)}}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt'} + V$$

$$\mathbf{v = v' + V} \quad \dots \text{ le velocità si sommano.}$$

Somma di velocità 2



$$\overline{OP} = \overline{OO'} + \overline{O'B}$$

$S(O,x)$: è un SdR «fermo», dove sta Alice

$S'(O',x')$: è un SdR in moto rispetto ad S con velocità V .

x e x' sono le posizioni del punto B (Bob) misurate in S e in S' .

$$\overline{OP} = \overline{OO'} + \overline{O'B} \quad \text{(Spazio assoluto)}$$

$$x = Vt + x' = x' + Vt$$

$$\frac{x}{t} = \frac{x'}{t} + V, \text{ ma: } \mathbf{t = t' !} \quad \text{(Tempo assoluto)}$$

$$\frac{x}{t} = \frac{x'}{t'} + V$$

$$\mathbf{v = v' + V} \quad \dots \text{ le velocità si sommano.}$$

Cose che non tornano: le velocità della luce

Galileo: le velocità si sommano

...e dovrebbe valere anche per la velocità della luce quando viene emessa da un sistema che si muove, per esempio dalla terra.

Il problema di Faraday e altri: dove «sta» l'energia della luce mentre viaggia? (vedi altri tipi di onde)

L'ipotesi è che la luce venga trasportata dall'etere, solidale con lo spazio assoluto, che attraversa tutti i corpi.

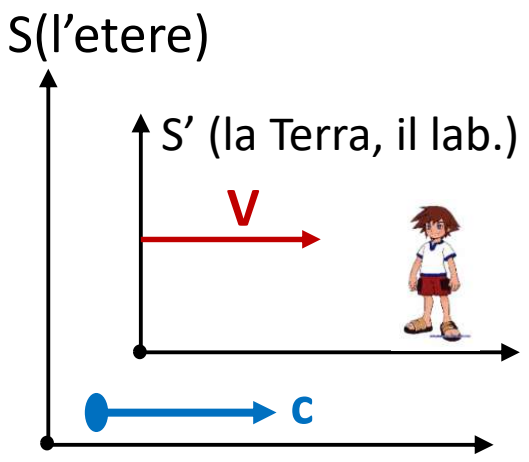
Nel 1887 Michelson e Morley fanno la misura «lanciando» la luce una volta nel senso di rivoluzione della Terra, una volta in senso contrario, e perpendicolarmente:

NON VEDONO NESSUNA DIFFERENZA!

Le formule della Relatività galileiana non funzionano!

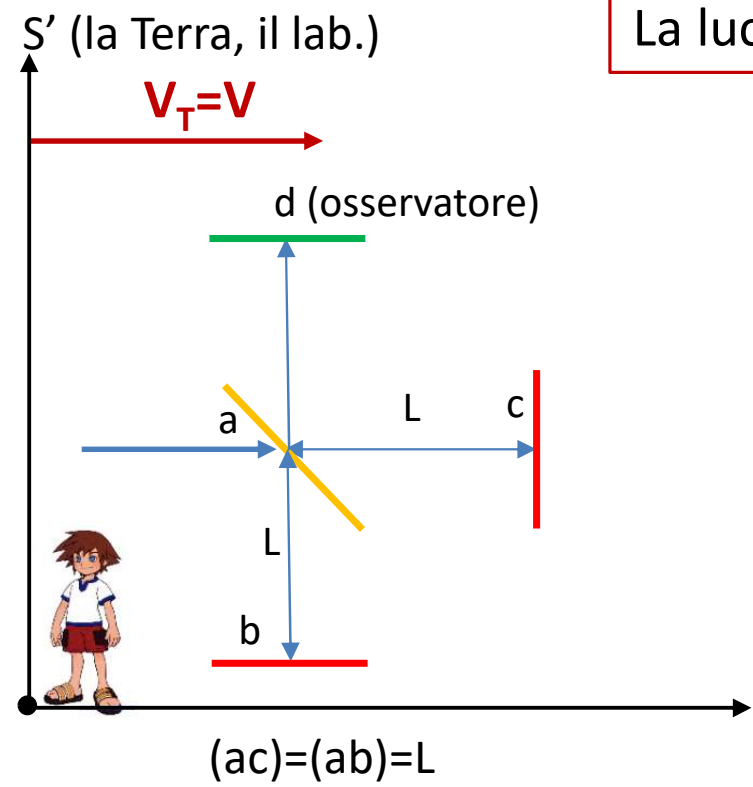


Michelson & Morley (1887)



S: è il SdR Assoluto l'etere che trasporta la luce.
 S': è la Terra, il SdR del laboratorio dove si trova Bob

La luce fa i due percorsi: (acad) ; (abad)



$$t(ac) = \frac{L}{v_{ac}} = \frac{L}{c - V}$$

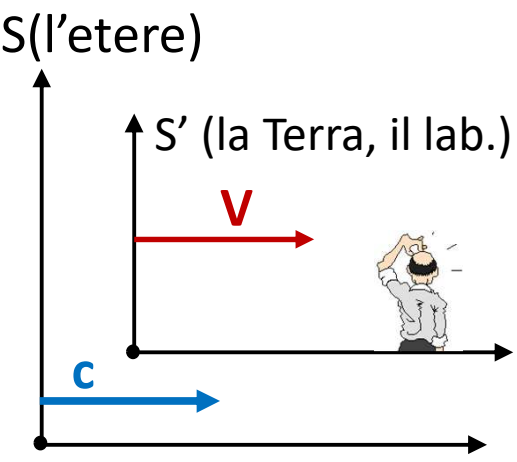
$$t(ca) = \frac{L}{v_{ca}} = \frac{L}{c + V}$$

$t(ca) \neq t(ac)$



Michelson & Morley (1887)

S: è il sistema «fermo» - l'etere che trasporta la luce che ha velocità c
 S': è il sistema con velocità V rispetto a S, la Terra, il laboratorio.



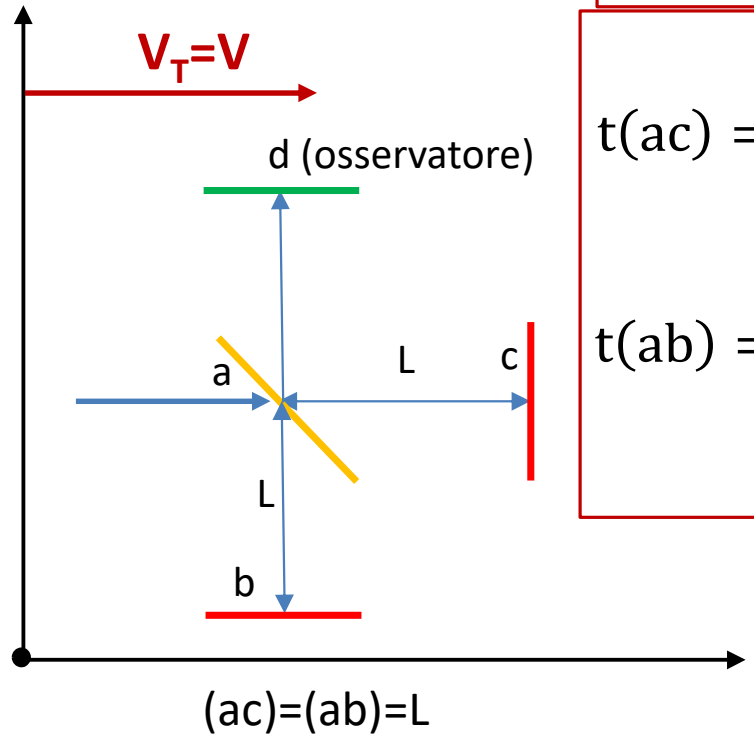
La luce fa i due percorsi: (acad) ; (abad)

$$t(ac) = \frac{L}{v_{ac}} = \frac{L}{c - V} \quad t(ca) = \frac{L}{v_{ca}} = \frac{L}{c + V}$$

$$t(ab) = t(ba) = \frac{L}{c} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

$$t(aca) = \frac{2L}{c} \cdot \frac{1}{1 - V^2/c^2}$$

$$t(aba) = \frac{2L}{c} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$



Michelson & Morley (1887) - 5

La previsione teorica supponendo che esistesse l'etere

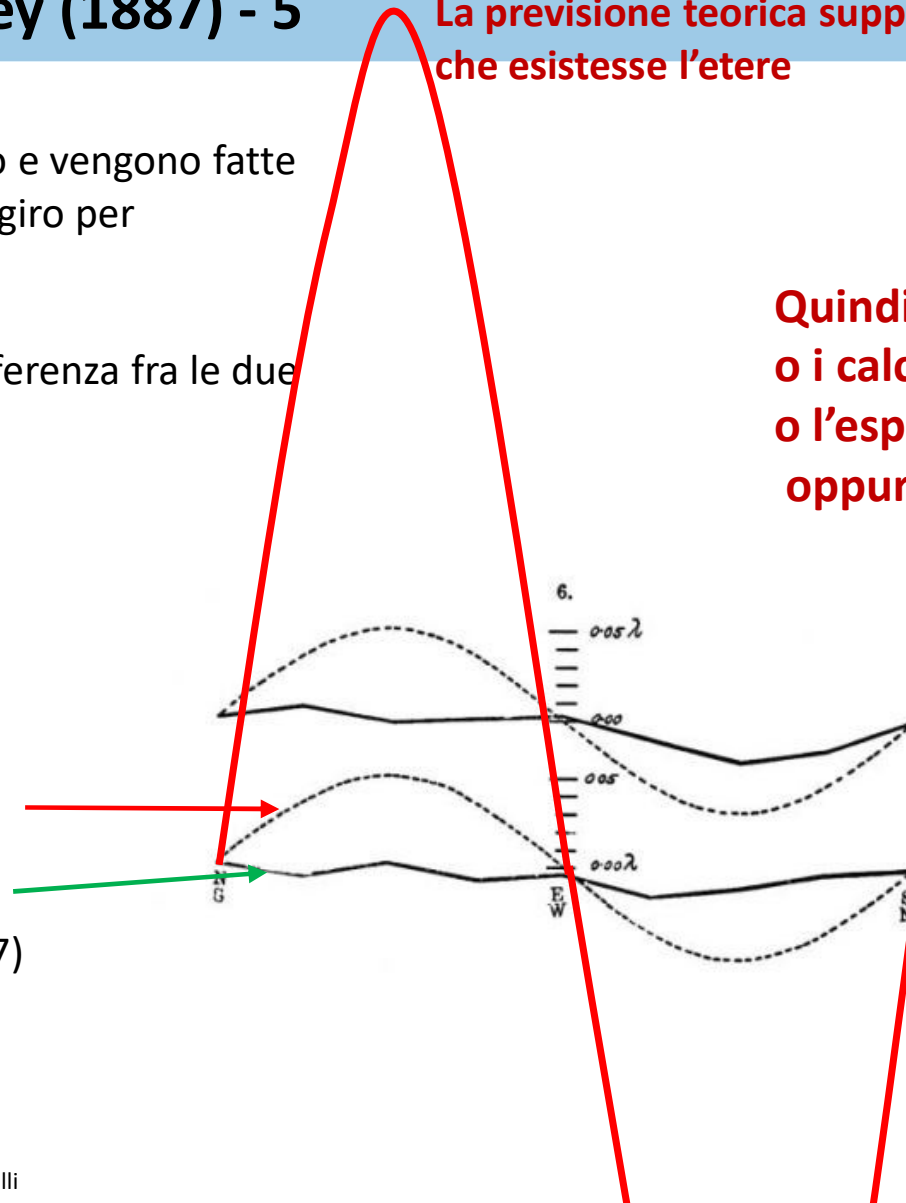


Il dispositivo viene ruotato e vengono fatte 8 misure su tutto l'angolo giro per controllare l'apparato.
Il risultato delle misure: non si vedeva nessuna differenza fra le due situazioni.

Quindi:
o i calcoli erano sbagliati,
o l'esperimento era sbagliato,
oppure era la teoria a essere sbagliata.

La previsione teorica/8

Il risultato sperimentale (Michelson & Morley 1887)





Altre cose che non tornano: spire e magneti in movimento relativo

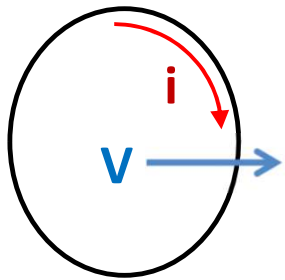
1. L'osservatore è solidale con la spira (un anello conduttore):



1) Muovo il magnete rispetto alla spira: nella spira passa una corrente i

$$i = \frac{f}{R}; \quad \mathbf{f} = -\frac{d\phi(\mathbf{B})}{dt} = -\frac{d}{dt} \int \bar{\mathbf{B}} \cdot d\bar{\mathbf{S}}$$

2. L'osservatore è solidale con il magnete:



2) Muovo la spira rispetto al magnete: nella spira passa una corrente i

$$i = \frac{f}{R} \quad ; \quad \mathbf{f} = \oint \bar{\mathbf{E}} \cdot d\bar{\mathbf{l}} = \oint \frac{\bar{\mathbf{F}}}{q} \cdot d\bar{\mathbf{l}} = -\oint \bar{\mathbf{v}} \times \bar{\mathbf{B}} \cdot d\bar{\mathbf{l}}$$

Nei due casi devo utilizzare due formule diverse per calcolare la corrente i , **ma in realtà ho sempre e solo un movimento relativo del magnete rispetto alla spira...** quale formula scegliere?

NON VA BENE!

... ancora altre cose che non tornano



- ❖ Il colore del cielo, è nero di notte e azzurro di giorno, perché? (Keplero 1601, Olbers 1826).
- ❖ Il colore degli oggetti in funzione della temperatura.
- ❖ La quantità di radiazione elettromagnetica, di energia radiante, che esce da un corpo nero (\sim un forno caldo).
- ❖ L'elettrone ruota intorno al nucleo senza caderci dentro, perché?.
- ❖ Le proprietà assolutamente costanti degli elementi.
- ❖ Le differenze di comportamento fra gli elementi: 1 elettrone in meno fa molta più differenza che molti elettroni in meno: $\text{Xe}^{54} \neq \text{I}^{53}$; ma $\text{Xe}^{54} \cong \text{Kr}^{36}$.

Le soluzioni a (quasi) tutti questi problemi



- **Relatività Ristretta (1905)**
- **Relatività Generale (1915)**
- **Meccanica Quantistica «ortodossa» (1900-1927)**
- **... Meccanica quantistica-relativistica (1940...)**
- **... Modello Standard (→ 2014...)**
- **... Modello del Big Bang (→ 2014...)**

30.6.1905

Albert Einstein, il 30 giugno 1905 pubblica:
«Sull'elettrodinamica dei corpi in movimento»

E' la teoria della Relatività (speciale).

...e il 27 settembre dello stesso anno:

«L'inerzia di un corpo dipende dal suo contenuto di Energia?»

E' il famoso: $E=mc^2$

E' una rivoluzione: A. E. non cambia le leggi della fisica, non cambia/discute gli esperimenti, non cambia le formule di base... cambia il contenitore di tutto: lo spazio e il tempo.

Quindi in realtà cambia tutto.



A. Einstein: la relatività ristretta (1905)...l'inizio

A. Einstein propone di ridefinire lo spazio ed il tempo, partendo da due **Principi** (affermazioni date per vere). (leggere)



I due Principi della Relatività speciale

1) Le leggi della Fisica sono le stesse in tutti i sistemi di riferimento «inerziali».

... cioè per tutti i sistemi che si muovono uno rispetto all'altro di velocità costante (anche nulla). Vale per **TUTTE** le leggi della Fisica, non solo per la meccanica.

2) La velocità della luce nel vuoto è una costante universale.

E' indipendente dal moto di chi la emette o di chi la riceve.

Conseguenze (vedi dopo): Le velocità non si «sommano» aritmeticamente, le velocità si sommeranno secondo regole particolari, diverse dalla semplice somma di Galileo.

Le regole di Galileo continuano a essere valide per velocità molto minori di quelle della luce: $v \ll 300'000 \text{ km/s}$

Nota formale: Come utilizzare l'assunzione c =costante, un esempio



Come descrivo un impulso di luce che viene emesso da una sorgente puntiforme in maniera isotropa?

La sorgente sia nell'origine del sistema $S(O,x,y,z)$, il raggio cresce con velocità c , quindi:

$r^2 = c^2 t^2$; $x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2$ (1) ma la velocità c deve essere la stessa anche se la misuro da un sistema S' in

moto rispetto ad S , per esempio con velocità: $\bar{V} = V\hat{x} \dots \dots \rightarrow x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2$ (2)

Ora applichiamo le trasformazioni di Galileo: $x' = x - Vt$; $y' = y$; $z' = z$; $t' = t$ alla relazione (2):

$x^2 - 2Vxt + V^2 t^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2 \dots \dots$ Non è uguale alla (1): le trasformazioni di Galileo non vanno bene!

Come trovare delle trasformazioni giuste?

- I termini in y' e z' vanno bene....
- La trasformazione deve essere «lineare» in x e t perché voglio che la sfera si espanda a velocità costante....quindi relazioni come $x' = x^{1/2} t^{1/2}$ oppure $x' = \sin x \dots \dots$ non sarebbero un moto uniforme
- Devo cambiare anche $t' = t \dots \dots$ per cancellare i termini $-2Vxt + V^2 t^2 \dots \dots$

Nota formale: Come utilizzare l'assunzione $c=\text{costante}$ 2



$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2 \quad (1) \quad x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2 \quad (2) \quad \text{Cerco una trasformazione che renda } (1) = (2)$$

- La trasformazione deve essere «lineare» in x e t perché voglio che la sfera si espanda a velocità costante....quindi relazioni come $x' = x^{1/2} t^{1/2}$ oppure $x' = \sin x$ non sarebbero un moto uniforme
- Devo cambiare anche $t' = t$per cancellare i termini $-2Vxt + V^2 t^2$devo inserire anche la x in t'

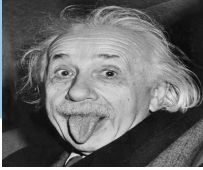
Provo con: $x' = x - Vt$; $y' = y$; $z' = z$; $t' = t + \mathbf{fx}$ (3) dove f è ignota, la devo trovare

Calcoliamo la (2), inserendovi le (3): $x^2 \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) + y^2 + z^2 = c^2 t^2 \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)$...che già va molto meglio, rispetto alla (1) c'è il fattore fra parentesi, che però è costante ed è lo stesso per la x e la t , quindi posso eliminarlo scrivendo:

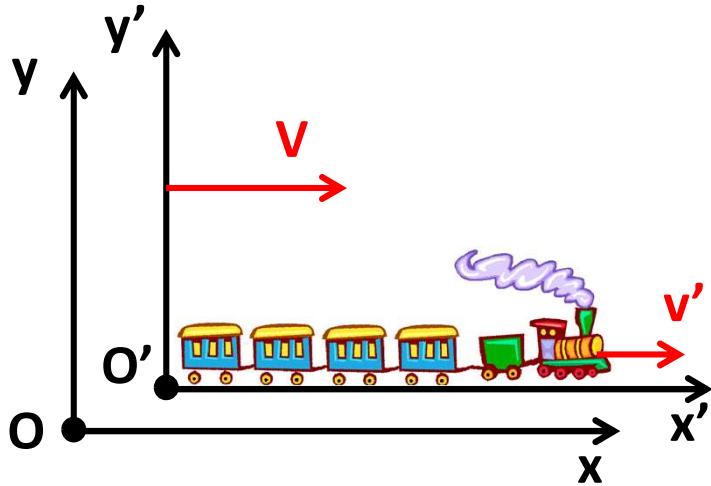
$$\left\{ \begin{array}{l} x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} ; \quad y' = y \quad ; \quad z' = z \\ t' = \frac{t - (V/c^2)x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \end{array} \right.$$

Queste trasformazioni funzionano (sono le trasformazioni di Lorentz) con queste (1)=(2) cioè **$c = \text{costante}$**

Meccanica classica: Le trasformazioni di coordinate di Galilei



Spazio e Tempo sono assoluti e indipendenti.



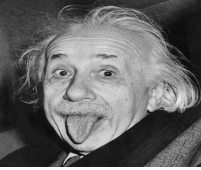
Trasformazioni di
coordinate galileiane

$$\begin{cases} x = x' + Vt' \\ y = y' & ; \quad z = z' \\ t = t' \end{cases}$$

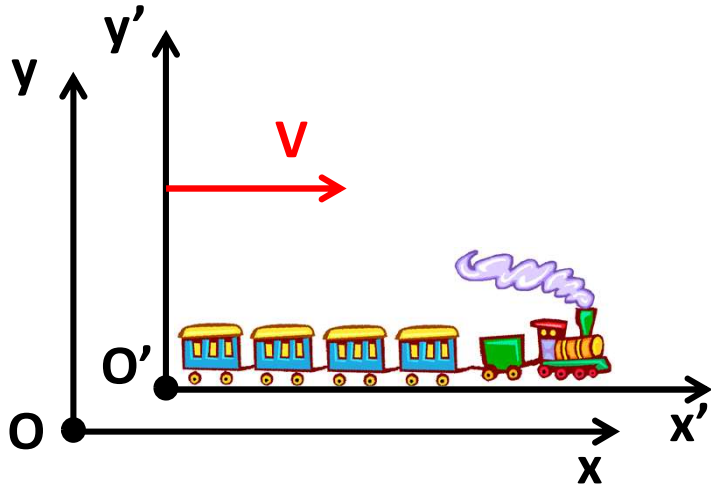
Somma di velocità:

$$\bar{v} = \bar{v}' + \bar{V}$$

Il risultato matematico: Le trasformazioni di Lorentz (?)



Spazio e Tempo non sono più assoluti e indipendenti, la misura di uno dipende dalla misura dell'altro



~~Galilei
$$\begin{cases} x = x' + Vt' \\ y = y' ; z = z' \\ t = t' \end{cases}$$~~

$$\text{Lorentz } \begin{cases} x = \gamma \cdot (x' + Vt') \\ y = y' ; z = z' \\ t = \gamma \cdot (t' + x'V/c^2) \end{cases}$$

$$\gamma = 1 / \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

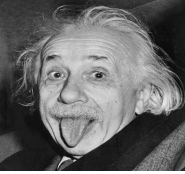
$$\begin{aligned} V = 0 &\rightarrow \gamma = 1 \\ V = c &\rightarrow \gamma = \infty \end{aligned}$$

Nelle trasformazioni appare il fattore γ : $1 \leq \gamma \leq \infty$

Il fattore γ ci dice quanto è grande l'effetto della relatività.

I sistemi "relativistici" hanno $\gamma \gg 1$. Se $V \ll c$, $\gamma \cong 1$.

Quanto deve essere grande γ per “vedere” effetti relativistici?



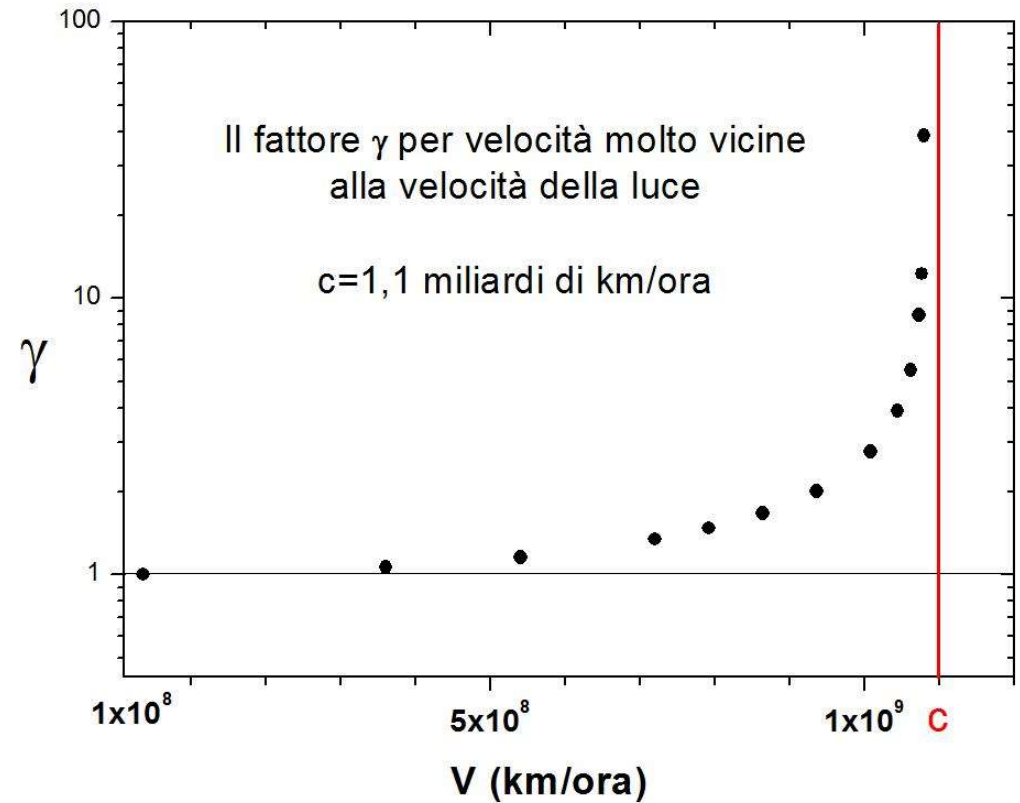
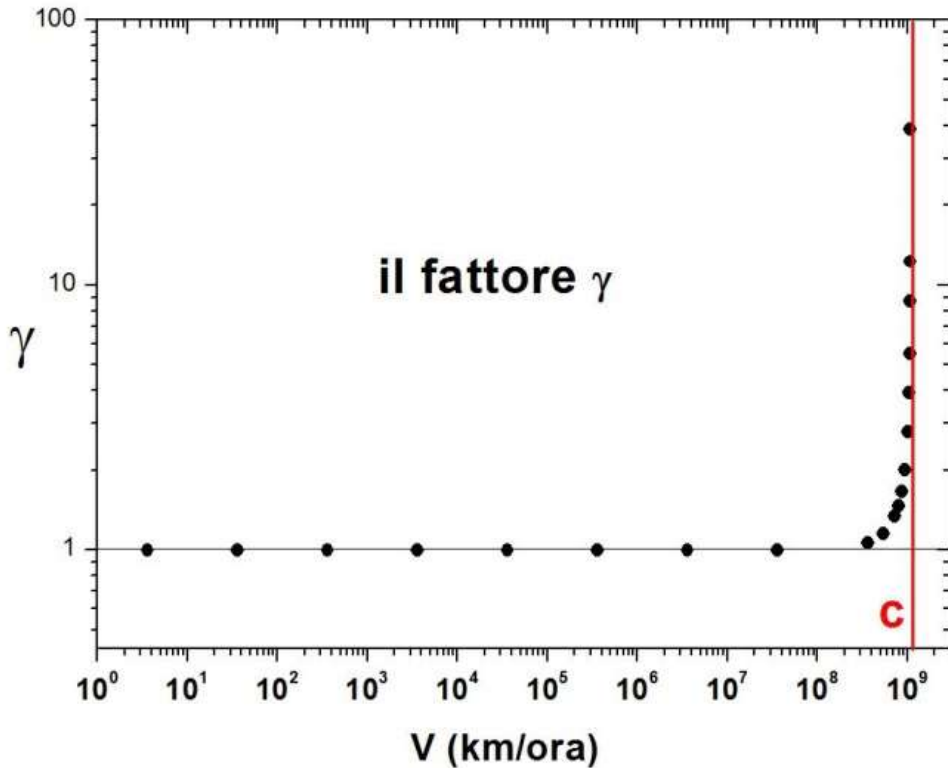
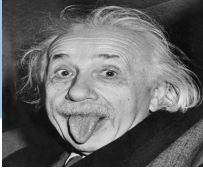
Oggetto	V(km/ora)	V(m/s)	beta= V/c	γ
Laboratorio	0	0	0	1
Concorde	2.400	667	2,2E-06	1,0000000000
Aereo X15	7.300	2.028	6,8E-06	1,0000000000
Satellite GPS@26500 km	13.600	3.778	1,3E-05	1,0000000001
Terra/Sole	108.000	30.000	1,0E-04	1,0000000050
Sole/galassia	828.000	230.000	7,7E-04	1,0000002939
	1.000.000	300.000	1,0E-03	1,0000005000
		3.000.000	1,0%	1,00005
		30.000.000	10%	1,00504
		90.000.000	30%	1,04828
		150.000.000	50%	1,2
	936.000.000	260.000.000	86,7%	2,0
			94,1%	3,0
			95,0%	3,2
			97,0%	4,1
			98,0%	5,0
			99,0%	7,1
			99,5%	10,0
			99,80%	15,8
			99,85%	18,3
			99,90%	22,4
Muoni atmosferici			99,92%	25,0
			99,97%	40,8
			99,99%	70,7
			99,995%	100
			99,999%	224
			99,9998%	500
			99,999900%	707
Protoni LHC - CERN		299 792 455	99,999999%	7071
Luce nel vuoto		299 792 458		∞

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

γ è il fattore di dilatazione o di contrazione dei tempi, delle lunghezze, delle forze, dei campi elettrici, magnetici...

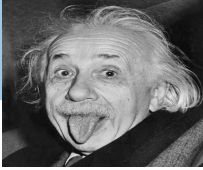
Nota: γ dipende dal quadrato di v , cioè da v^2 , quindi è indipendente dal «verso» della velocità, se l'oggetto si allontana o si avvicina.

Quanto deve essere grande γ per “vedere” effetti relativistici?

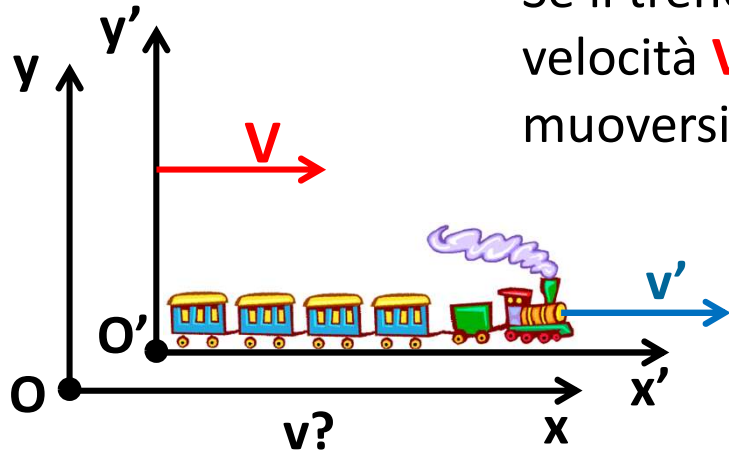


Se le velocità relative sono minori di 100 milioni di km/ora...non ho quasi nessun effetto. Ecco perché le formule di Newton e di Galileo funzionano lo stesso, p.e. sulla Terra.

Il risultato matematico: Le trasformazioni delle velocità 1



Se il treno va a velocità v' nel SdR O' che si muove con velocità V rispetto al SdR O , a che velocità v lo vedrò muoversi dal sistema O ?



$$\begin{cases} x = \gamma \cdot (x' + Vt') & ; \quad dx = \gamma dx' + \gamma V dt' \\ t = \gamma \cdot (t' + x'V/c^2) & ; \quad dt = \gamma dt' + \gamma \frac{V}{c^2} dx' \end{cases}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

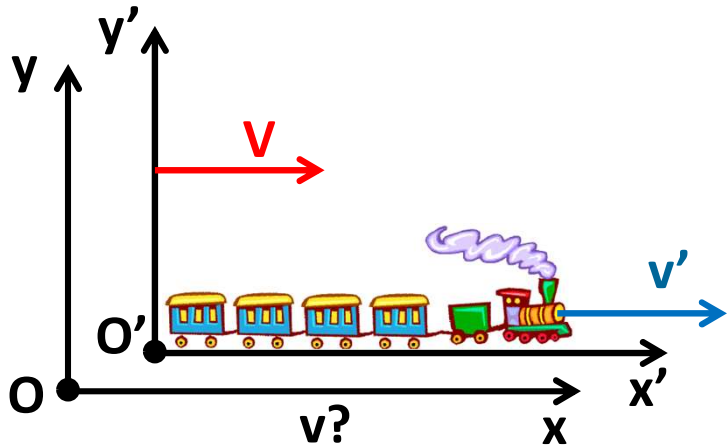
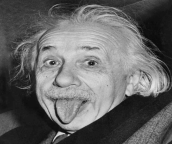
Somma delle velocità in Relatività Speciale

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{\gamma dx' + \gamma V dt'}{\gamma dt' + \gamma \frac{V}{c^2} dx'} = \frac{v' + V}{1 + v'V/c^2}$$

Somma delle velocità per Galilei

$$v = v' + V$$

Le trasformazioni delle velocità 2



Come funziona la somma delle velocità:

$$v = \frac{v' + V}{1 + v'V/c^2}$$

$$v' = c \rightarrow v = c$$

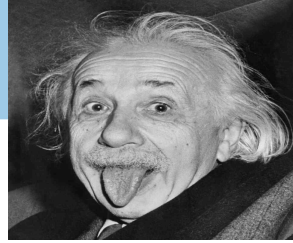
$$V = c \rightarrow v = c$$

Supponiamo che $V = 0,9 c$

$$v = \frac{v' + 0,9 c}{1 + 0,9 v'/c}$$

v'	$v(\text{Galilei})$	$v(\text{Einstein})$
0	0,9 c	0,9 c
0,5 c	1,4 c	0,96 c
0,8 c	1,7 c	0,988 c
0,9 c	1,8 c	0,994 c
0,95 c	1,85 c	0,997 c
c	2c	c

I risultati fisici: come cambia il mondo (o la nostra visione?)



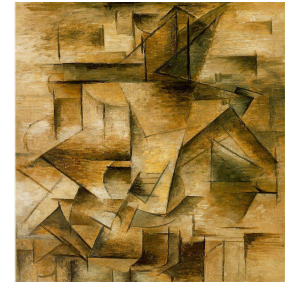
Dalle trasformazioni di Lorentz seguono due conseguenze molto importanti che riguardano la descrizione dello spazio e del tempo...

Lo spazio e il tempo si allungano o si accorciano, a seconda di chi li osserva (misura).

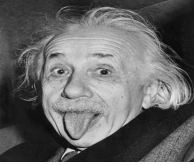
Gli oggetti non se ne accorgono...ma chi li misura sì, li vede differenti... **sono differenti. (Lorentz!!!)**

Se osservo degli eventi in movimento rispetto a me succede che:

1. Per me le lunghezze si contraggono nella direzione del moto, mentre rimangono invariate in direzione perpendicolare al moto.
2. Per me gli intervalli temporali si dilatano.
3. L'ordine con cui avvengono alcuni eventi non è più determinato, dipende da chi li guarda.



La contrazione delle lunghezze



Un oggetto in moto rispetto a un osservatore risulta più corto di quanto apparirebbe (se venisse misurato) lo stesso oggetto per un osservatore in quiete rispetto all'oggetto.

La contrazione delle lunghezze avviene **lungo la direzione del moto!** (persone su di un treno in movimento)

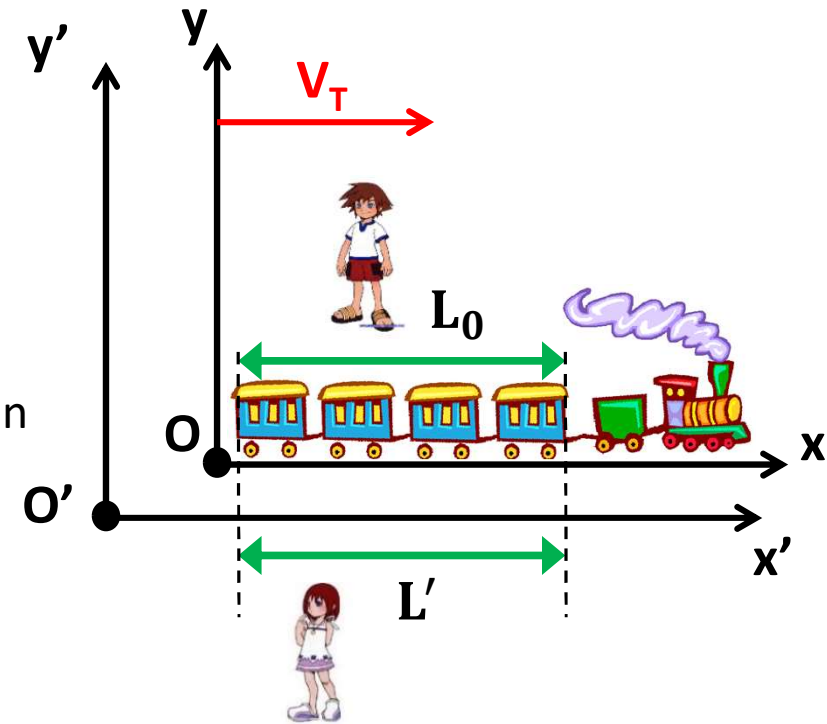
D: Le persone che si trovano sul treno si accorgono di subire una contrazione?

R: No, al contrario, per loro è chi sta a terra a subire una identica contrazione. Il moto è relativo. La contrazione anche.

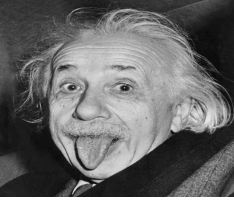
Se L_0 è la lunghezza di un oggetto solidale con O , che si muove con velocità V rispetto a O' , allora la lunghezza L' dello stesso oggetto misurata da O' è:

$$L' = \frac{L_0}{\gamma} < L_0$$

Nota: $\gamma \geq 1$ quindi $L' \leq L_0$



La dilatazione dei tempi



Un orologio, in moto rispetto ad un osservatore, appare a questo andare più veloce di un identico orologio solidale con lo stesso osservatore.

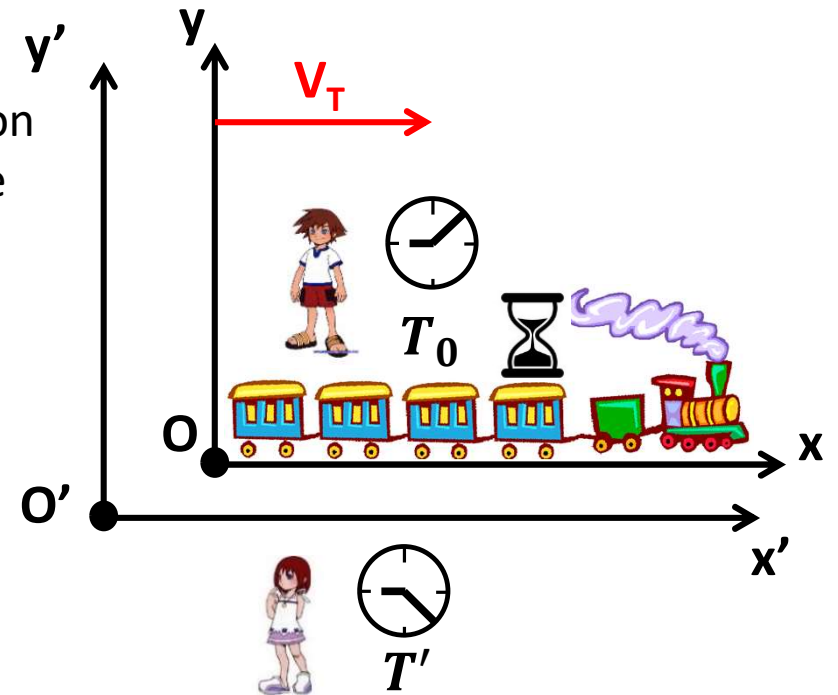
D: I passeggeri del treno “vivono di più” di quelli a terra?

R: No, anzi, per chi sta sul treno sono gli orologi di chi sta a terra a rallentare. Il moto è relativo, non assoluto.

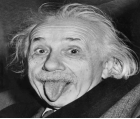
Se T_0 è un intervallo di tempo segnato da un orologio solidale con O , allora lo stesso intervallo T' misurato con un orologio solidale con O' è:

$$T' = \gamma \cdot T_0 \geq T_0$$

Nota: $\gamma > 1$ quindi $T' > T_0$



Le trasformazioni di Lorentz (?)



Le trasformazioni di Lorentz
(J. Larmor 1897 - H. A. Lorentz 1904)

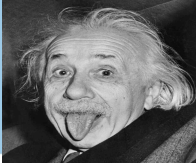
$$\begin{cases} x = \gamma \cdot (x' + Vt') \\ y = y' \quad ; \quad z = z' \\ t = \gamma \cdot (t' + \mathbf{x}'V/c^2) \end{cases}$$

Le trasformazioni nella relatività speciale
(A. Einstein 1905)

$$\begin{cases} x = \gamma \cdot (x' + Vt') \\ y = y' \quad ; \quad z = z' \\ t = \gamma \cdot (t' + \mathbf{x}'V/c^2) \end{cases}$$

Sono identiche, quale è allora la differenza? L'interpretazione fisica!!!
Non sono gli oggetti che si accorciano o i tempi che si dilatano, è lo spazio e il tempo che cambiano scala.

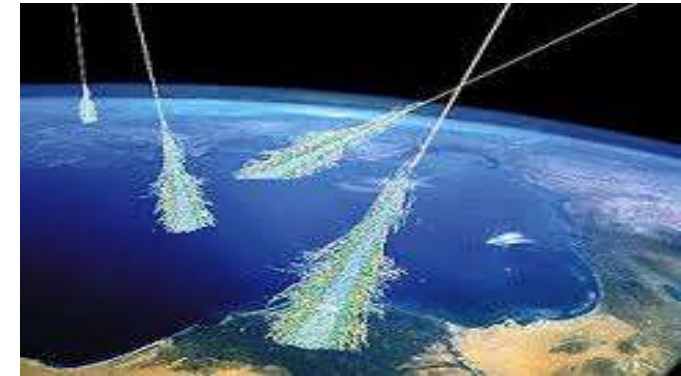
Il mistero dei muoni: perché arrivano sulla terra e cosa c'entra la relatività del tempo?



I muoni sono particelle con carica -1, come gli elettroni, ma 200 volte più pesanti.

FATTI:

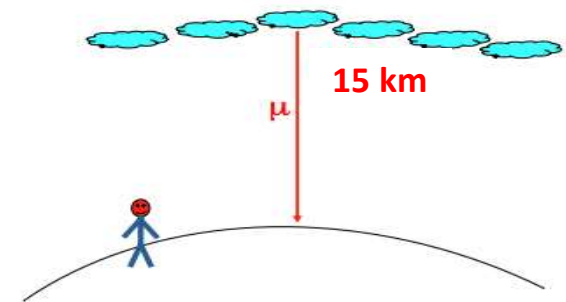
- I muoni sono prodotti nell'alta atmosfera, a circa 15 Km dal suolo con una v molto vicina a c : $v = 0,9992 c = 99,92\% c$
- Vivono pochissimo, decadono (in media) dopo $\tau_{\mu} = 2,2 \mu s$
- La metà di essi raggiunge la superficie terrestre e attraversa il nostro corpo (circa 1000 al minuto)

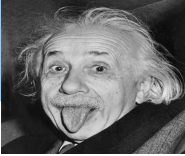


D: Che distanza percorrono prima di decadere (in media)?

$$d = c \cdot \tau_0 \cong 660 \text{ m}$$

Come possono i muoni raggiungerci se decadono dopo 660 m?



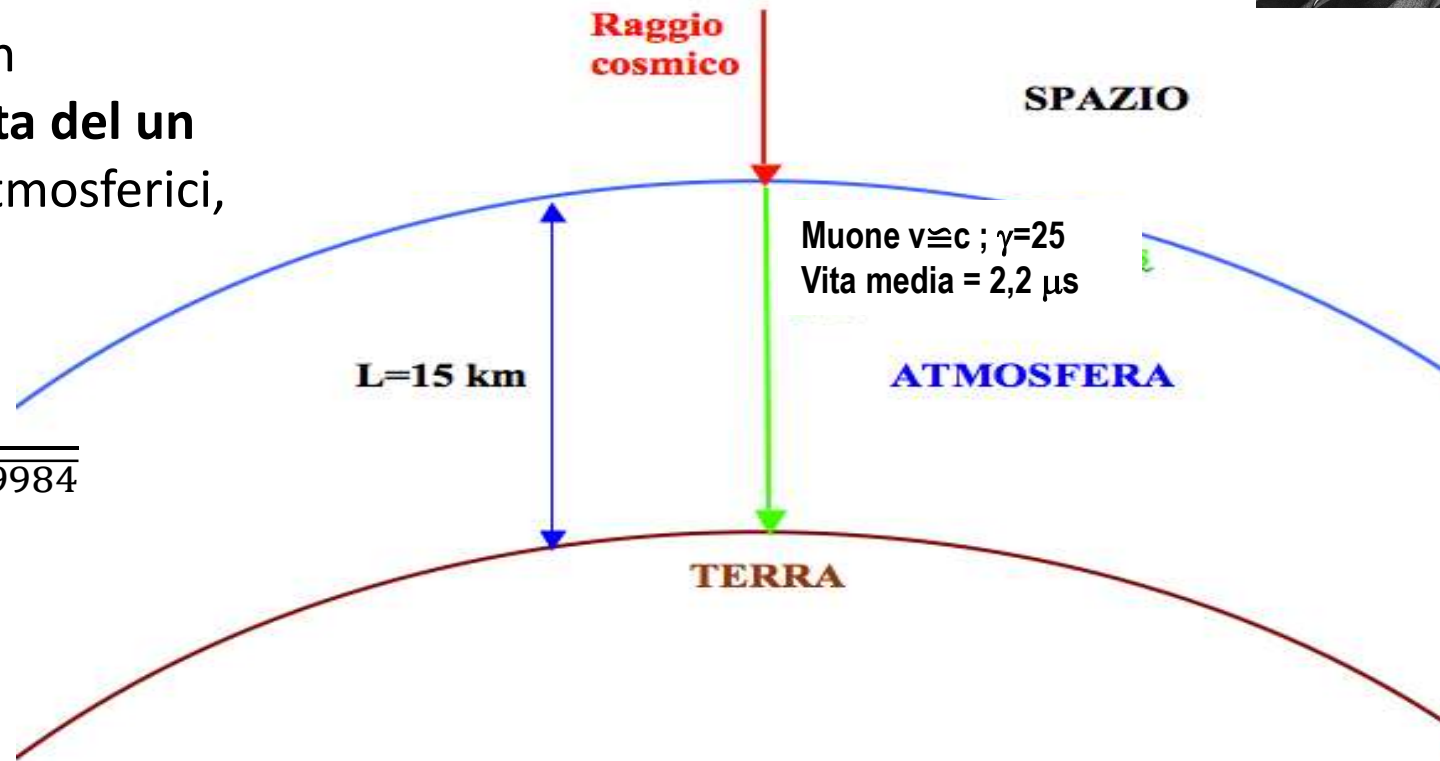


I muoni sono particelle relativistiche, hanno una velocità $v \cong c...$

La loro vita media, misurata da un osservatore a terra appare **dilatata del un fattore γ** che nel caso di muoni atmosferici, con v prossima a c , vale circa **25**.

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - (0,9992)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - 0,9984}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{0,0016}} \cong \frac{100}{4} = \mathbf{25}$$



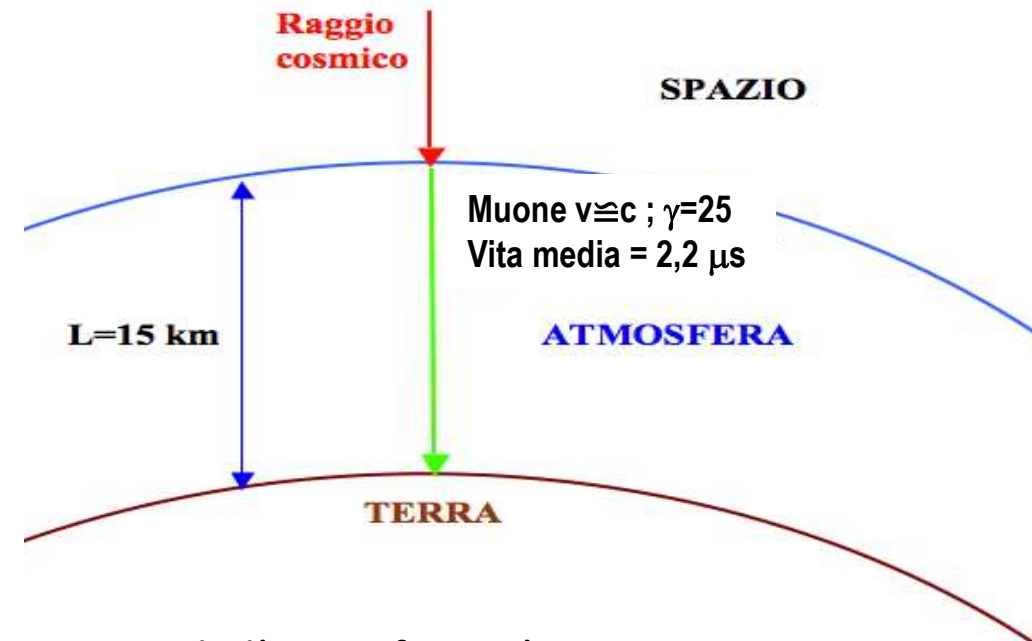
Quindi i muoni, per noi che siamo sulla terra, vivono 25 volte di più, $\tau = 25 \tau_{\mu} = 55 \mu s$, quindi percorreranno in media una distanza $d = c \tau = 16,5 \text{ km}$ e possono raggiungere la terra.



Ma i muoni sono particelle relativistiche, hanno una velocità $v \cong c$...

Analogamente la distanza che devono percorrere, misurata dai muoni stessi, appare contratta del fattore γ .

I muoni quindi, dal loro punto di vista, vedono l'atmosfera spessa solo: $15 \text{ Km}/25 \sim 600 \text{ m}$, quindi in $2,2 \mu\text{s}$ riescono ad attraversarla.



Dalla Terra si vede un muone con la vita più lunga, dal muone si vede l'atmosfera più corta.

Tutto sembra relativo, ma in realtà è tutto coerente, qualunque osservatore vede la stessa cosa:

Il muone, che classicamente non potrebbe attraversare l'atmosfera, in realtà raggiunge la Terra, e può essere rivelato.

La realtà è una sola «il muone arriva sulla Terra», la RS descrive lo stesso evento per ogni osservatore.

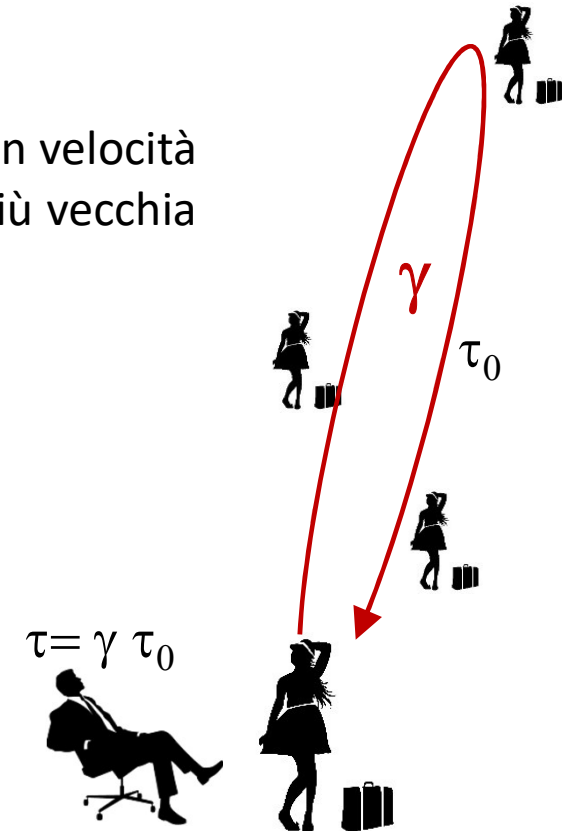


Il paradosso dei «gemelli» : non è un problema

Come viene posto: L'uomo e la donna sono due gemelli che hanno la stessa età. L'uomo sta sulla Terra. La donna parte per un viaggio con velocità $\gamma = 10$, e torna dopo $t_0=1$ anno, **sul suo orologio**. Per l'uomo il tempo passato è $t = \gamma t_0 = 10$ anni. Quindi l'uomo è 10 anni più vecchio, mentre la donna solo 1 anno più vecchia. Ma, nel sistema di riferimento della donna, è l'uomo che ha fatto il viaggio con velocità γ , quindi la donna vede il tempo dell'uomo dilatato di $\gamma\tau$, ed è lei ad essere più vecchia di lui. Quindi chi sarà più vecchio alla fine del viaggio?

La soluzione: I due sistemi [l'uomo, la donna] **non sono equivalenti**. Perché **l'uomo sta fermo**, è quindi un sistema inerziale, mentre **la donna** in almeno tre punti [partenza, inversione della velocità, arrivo] **DEVE accelerare/decelerare**, quindi il suo non è un sistema inerziale e non posso scrivere banalmente le relazioni relativistiche.

Quello che succede in realtà è che alla fine è l'uomo ad essere più vecchio. Ma non è semplice da vedere (calcolare).



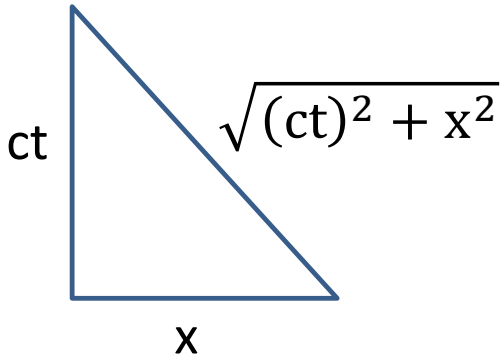
Lo spazio-tempo di Minkowski



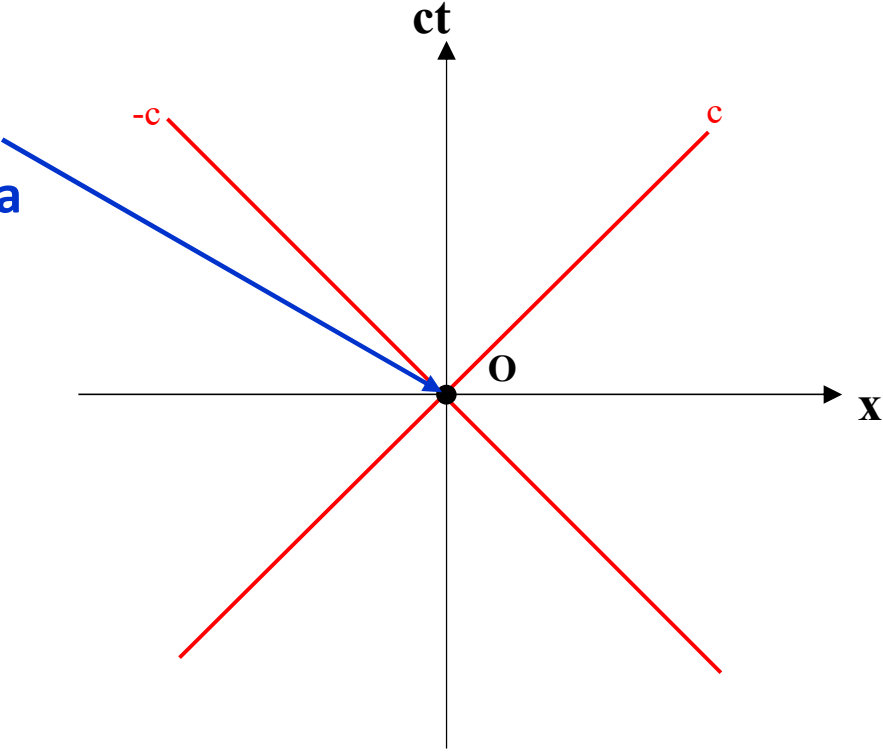
**Grafico spazio-tempo a due sole dimensioni, una per lo spazio (x), una per il tempo (ct)
L'osservatore sta nell'origine, ora.**

(Vedi Relatività in grafici)

Il vantaggio di lavorare con due assi: x e ct, sta nel fatto che ct è una lunghezza, quindi può essere sommata o sottratta alla x. Quindi, p.e., posso calcolare l'ipotenusa del triangolo di cateti [ct, x]



Io, qua e ora



I problemi legati alla relatività del tempo – L'ALTROVE



Grafico spazio-tempo a due sole dimensioni, una per lo spazio (x), una per il tempo (ct)

Intervallo spazio temporale con O(0,0): $s^2 = c^2t^2 - x^2$

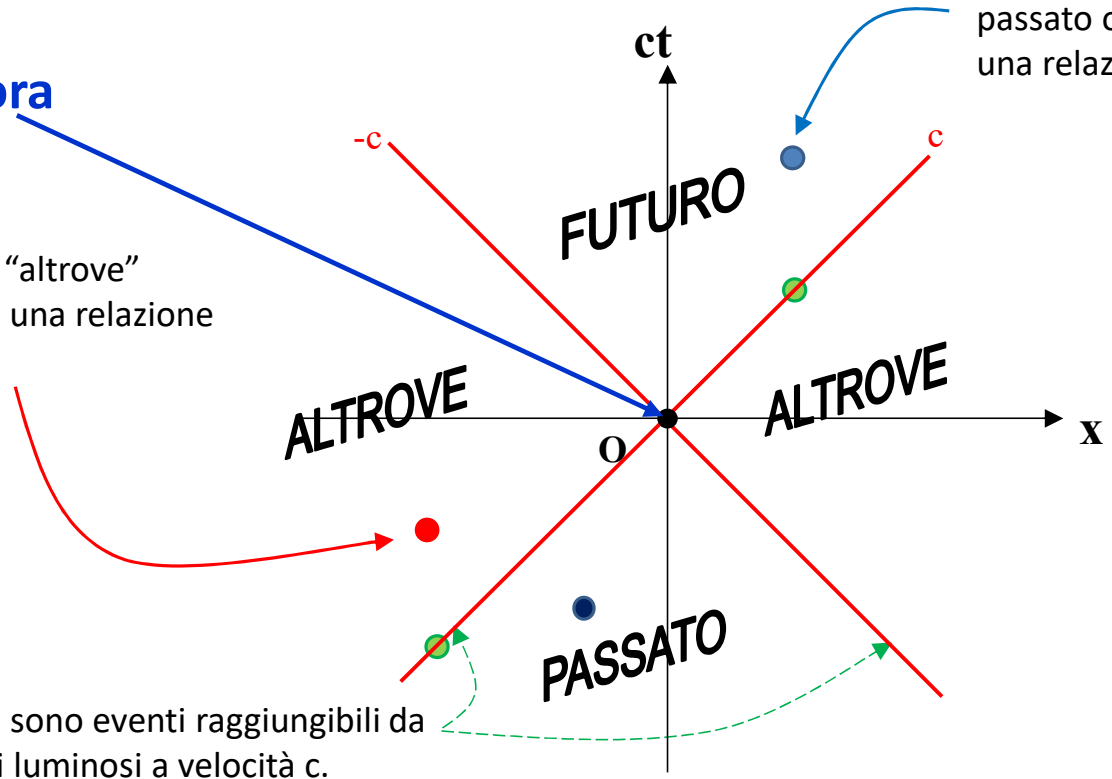
[in generale per due eventi 1 e 2: $s^2 = c^2(t_2^2 - t_1^2) - (x_2^2 - x_1^2)$]

Io, qua e ora

● Eventi "spazio" : $s^2 < 0$, sono "altrove" rispetto ad O, NON è possibile una relazione causale con O.

● Eventi "luce" : $s^2 = 0$, sono eventi raggiungibili da O solo tramite segnali luminosi a velocità c.

● Eventi "tempo": $s^2 > 0$, sono nel passato o nel futuro di O, è possibile una relazione causale con O.



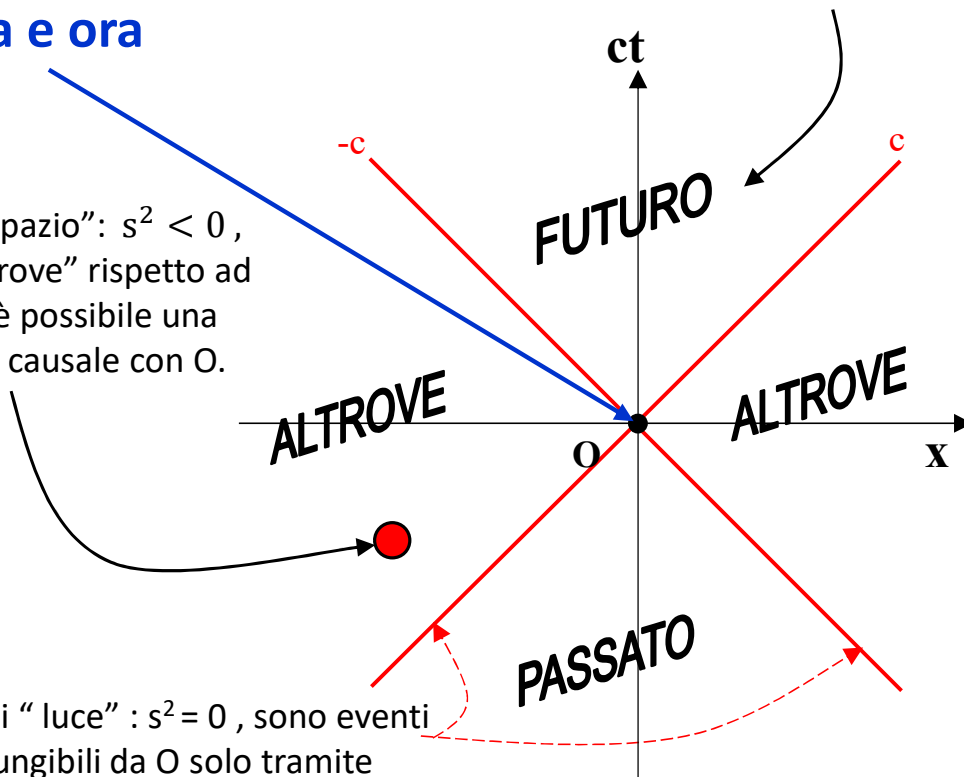
Il problema dell'ordine temporale con cui avvengono due eventi



Eventi "tempo": $s^2 > 0$, sono nel passato o nel futuro di O, è possibile una relazione causale con O.

Io, qua e ora

Eventi "spazio": $s^2 < 0$, sono "altrove" rispetto ad O, NON è possibile una relazione causale con O.



Eventi "luce": $s^2 = 0$, sono eventi raggiungibili da O solo tramite segnali luminosi a velocità c.

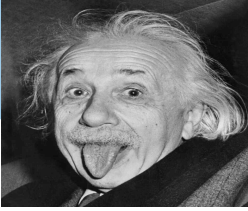


Gli eventi che si trovano nel mio «altrove» non possono avere una relazione di causa-effetto con me, ora, e possono essere visti nel mio passato o nel mio futuro a seconda di chi ci osserva.

Causalità $P1 \rightarrow P2 \Rightarrow$ coincidenza spaziale

$$\begin{aligned} \text{Se } x_1 = x_2 \Rightarrow s^2 &= c^2(t_2^2 - t_1^2) - (x_2^2 - x_1^2) \\ &= c^2(t_2^2 - t_1^2) > 0 \end{aligned}$$

Quindi una relazione causale implica che i due eventi siano di tipo "tempo"



Per riassumere: Relatività speciale - Lunghezze e Tempi

LUNGHEZZE: Se «vedo» un oggetto in movimento misurerò la sua lunghezza contratta nella direzione del moto, mentre rimarrà invariata la dimensione in direzione perpendicolare al moto.

TEMPI: Se «vedo» un evento con una durata Δt , in movimento rispetto a me, allora misurerò una durata $\Delta t'$ maggiore di Δt .

Ma non è l'oggetto in sé che si contrae o la durata che diventa maggiore, sono lo SPAZIO e il TEMPO che si contraggono e si dilatano (per me).

Un altro osservatore, in un altro sistema di riferimento, misurerebbe altre lunghezze ed altri tempi. L'oggetto non si accorge di nulla.

Cosa vede la luce? (un oggetto che idealmente andasse a velocità c).

Intervallo spazio-temporale: la grandezza che resta costante per tutti i SdR inerziali è

l'intervallo spazio-temporale: $s^2 = c^2t^2 - (x^2 + y^2 + z^2)$

c è veramente la velocità massima?



1. Non posso avere una velocità $v > c$ «sommando» le velocità.
...dalle trasformazioni di Lorentz per la somma di velocità.
2. Ma forse posso accelerare una particella a velocità maggiori di c ...

L'esperimento:

- Faccio passare degli elettroni attraverso una differenza di potenziale ΔV , quindi gli elettroni acquisteranno un'energia cinetica $E_c = q \Delta V$.
- Poi misuro la loro velocità v .
- Quindi li faccio assorbire da una massa, e dall'aumento di Temperatura della massa ricavo l'energia ceduta: $E_c = C \Delta T = c m \Delta T$

Relatività Speciale: c è la velocità massima? 2



L'esperienza

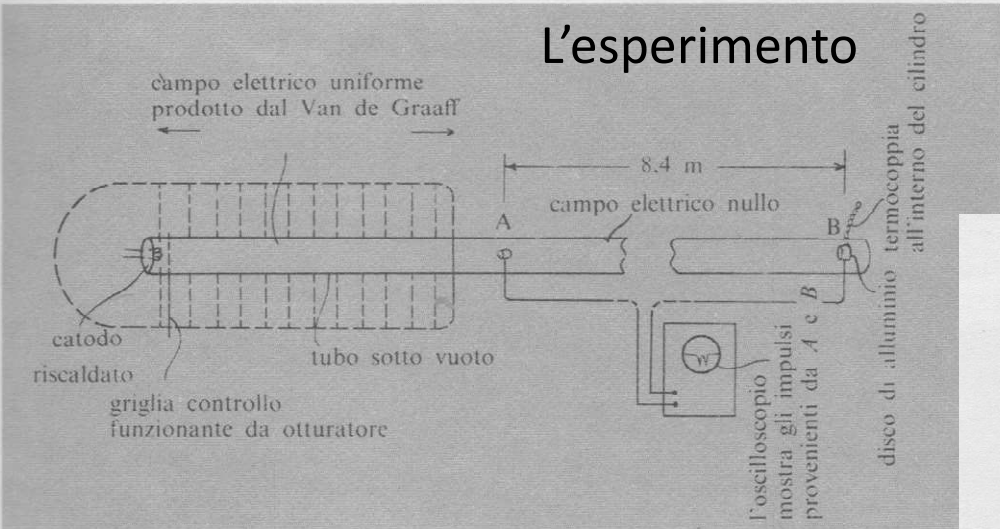


FIGURA 10.43 Schema generale dell'esperienza sulla velocità limite. Gli elettroni sono accelerati nel campo uniforme di sinistra e il tempo di transito fra A e B è misurato con un oscilloscopio.

Andamento classico: $T = E = \frac{1}{2} mv^2$

Risultati sperimentali: il grafico è della velocità² vs. l'E misurata.

- L'Energia aumenta...
- La velocità non supera c

→ m_e non può avere una velocità > c

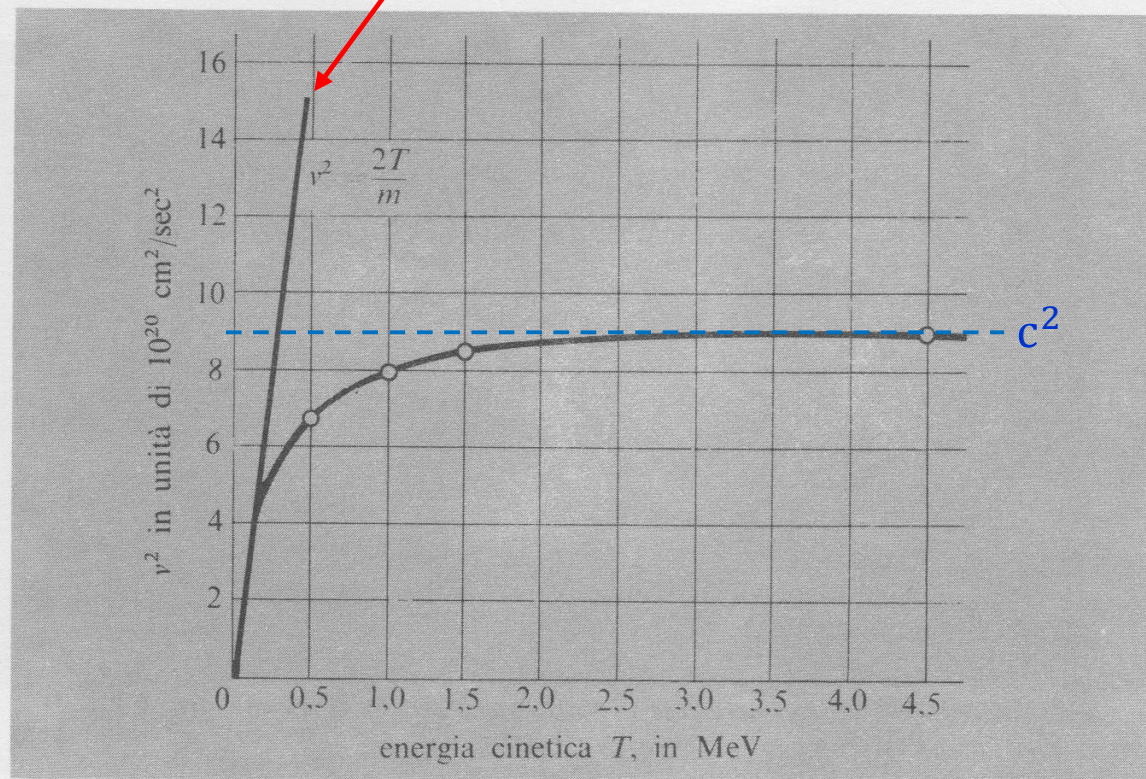


FIGURA 10.44



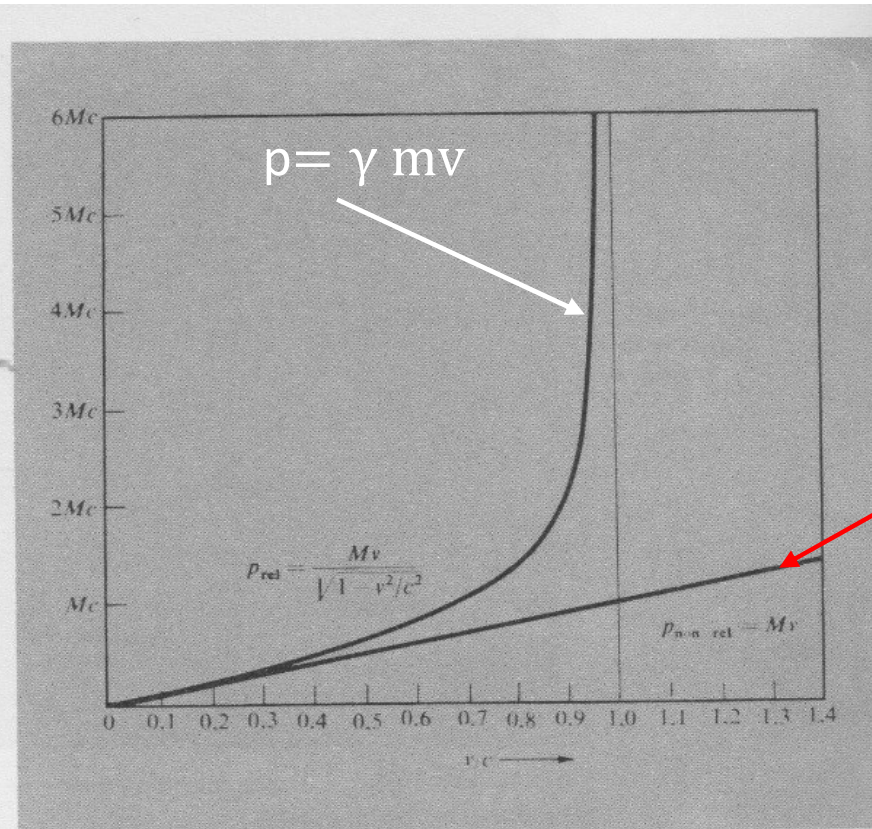
Relatività Speciale: c è la velocità massima? 3

Il problema della conservazione della quantità di moto in un urto fra due particelle...

La quantità di moto si conserva solo se la ridefinisco così:

$$\bar{p} = \frac{M\bar{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma M\bar{v}$$

E: $E_c = \frac{p^2}{2m}$



Andamento classico: $p = mv$

FIGURA 12.6 Affinché la conservazione della quantità di moto sia valida in tutti i sistemi di riferimento, ridefiniamo \mathbf{p} come segue: per una particella avente velocità \mathbf{v} e massa a riposo M deve essere:

$$\mathbf{p} = \frac{M\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

I valori della quantità di moto relativistica e di quella non relativistica sono riportati in grafico.



Cosa vuol dire che: $\bar{\mathbf{p}}(\mathbf{v}) = \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{m}\bar{\mathbf{v}}$

Ricordiamo che il fattore gamma ($\boldsymbol{\gamma}$) ci dice quanto stiamo andando veloci rispetto al sistema che stiamo osservando:

$$\boldsymbol{\gamma} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}, \text{ e che il fattore } \boldsymbol{\gamma} \text{ è praticamente uguale a 1 per}$$

tutte le velocità “piccole” rispetto alla velocità della luce, mentre diventa sensibile solo quando ci si avvicina ad essa.

Nel mondo in cui viviamo, per corpi «macroscopici», $\boldsymbol{\gamma}$ è sempre 1, e le quantità di moto cambiano di quantità molto molto piccole.

Il problema dell'energia: la soluzione di A. Einstein in relatività speciale



Fino ad ora si è parlato di Spazio e di Tempo, ma cosa succede alle masse e all'Energia?

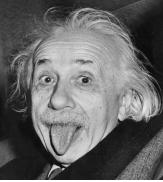
Nel settembre del 1905 Einstein pubblica un secondo articolo (vedi):
«L'inerzia di un corpo dipende dalla sua energia?»

Einstein scrive: *Se un corpo perde l'energia E sotto forma di radiazioni, la sua massa diminuisce di E/c^2 . Il fatto che l'energia sottratta al corpo diventi energia di radiazione non fa alcuna differenza, perciò siamo portati alla più generale conclusione che la massa di qualunque corpo è la misura del suo contenuto di energia.*

Quindi : $\Delta m = \frac{\Delta E}{c^2}$ **ovvero:** $\Delta E = \Delta m \cdot c^2$... **$E = m c^2$**

Cosa vuol dire, e come si inserisce questa relazione nell'ambito della Relatività?

Relatività Speciale – $E=mc^2$



Le lunghezze e gli intervalli di tempo dipendono dal sistema di riferimento, cioè dalla velocità di chi li osserva rispetto agli oggetti stessi.

E la massa e l'energia? Cosa vuol dire che l'energia dipende dalla massa, e viceversa?

Nota: L'energia non è un invariante...neanche per Galileo... $E_c = 1/2 m v^2$.

Si ridefinisce la quantità di moto: $\bar{p} \stackrel{\text{def}}{=} \gamma m \bar{v}$; con questa definizione la quantità di moto \bar{p} per un sistema isolato si conserva sempre.

L'energia di un corpo si scrive come somma di due termini, uno legato alla massa e uno legato alla sua velocità (stiamo trascurando l'energia termica $E(T) \cong N \cdot \frac{f}{2} k_B T$)

E si scrive così: $E = \sqrt{m^2 c^4 + p^2 c^2}$ o anche: **$E^2 - p^2 c^2 = m^2 c^4$**

In un sistema a riposo, in cui $v=0$, ho $p=0$, quindi: $E^2 = m^2 c^4$, cioè **$E = m c^2$** .

La massa m è un invariante.



Voi ora state perdendo massa?

$\Delta m = \frac{\Delta E}{c^2}$, quindi perdetevi massa se perdetevi Energia.

Perdetevi energia? Sì, scambiando energia termica con l'ambiente.

Facciamo un calcolo:

$T = 37\text{ }^\circ\text{C} = 310\text{ K}$



L'ambiente
 $T = 20\text{ }^\circ\text{C} = 293\text{ K}$

La potenza (Energia/secondo) scambiata dovuta alla differenza di temperatura è data dalla legge di Stephan Boltzmann:

$$\Delta W = \sigma_B \cdot S(T_C^4 - T_F^4)$$

$$\Delta W = 5,67 \cdot 10^{-12} \cdot 1,8 (310^4 - 293^4) = 1,9 \cdot 10^{-2} \text{ W} = 19\text{ mW} = \frac{\Delta E}{\text{tempo}}$$

$$\Delta m = \frac{\Delta E}{c^2} = \frac{\Delta W \cdot t}{c^2} = 2,11 \cdot 10^{-1} \cdot t$$

In un'ora ($t = 3600\text{ s}$) Alice avrà perso una massa **$\Delta m = 7,6 \cdot 10^{-16}\text{ kg}$**



L'energia di un corpo in movimento:

Riscriviamo la formula di Einstein $\mathbf{E} = \sqrt{\mathbf{m}^2 \mathbf{c}^4 + (\boldsymbol{\gamma} \mathbf{m} \mathbf{v})^2 \mathbf{c}^2} = \mathbf{m} \mathbf{c}^2 \cdot \sqrt{\mathbf{1} + \boldsymbol{\gamma}^2 \frac{\mathbf{v}^2}{\mathbf{c}^2}}$

Possiamo fare un calcolo **per velocità «piccole»**, cioè per $\mathbf{v} \ll \mathbf{c}$, quindi per $\boldsymbol{\gamma}^2 \cong \mathbf{1}$

$$\mathbf{E} \cong \mathbf{m} \mathbf{c}^2 \cdot \left(\mathbf{1} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \boldsymbol{\gamma}^2 \frac{\mathbf{v}^2}{\mathbf{c}^2} \right) \cong \mathbf{m} \mathbf{c}^2 + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \mathbf{m} \mathbf{v}^2 = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_c$$

L'energia di un corpo è composta di due termini, uno costante (è l'energia a riposo, quella per $\mathbf{v}=0$) ed il secondo che non è altro che la «vecchia» energia cinetica della meccanica classica.

Relatività Speciale – $E=mc^2$



Riassumendo: (per velocità «piccole» $v \ll c$)

$$E \cong m c^2 + \frac{1}{2} m v^2 = E_0 + E_c$$

Un corpo ha sempre un'energia $E_0 = m c^2$, anche se sta fermo,... se lo rompo... o se riesco a convertire in energia una parte della sua massa ottengo un'energia molto grande:

Per esempio se avessi 1 kg di ^{238}U ... e lo convertissi in Energia termica con l'efficienza dello 0,1%,
potrei ottenere un'energia elettrica (3:1) :

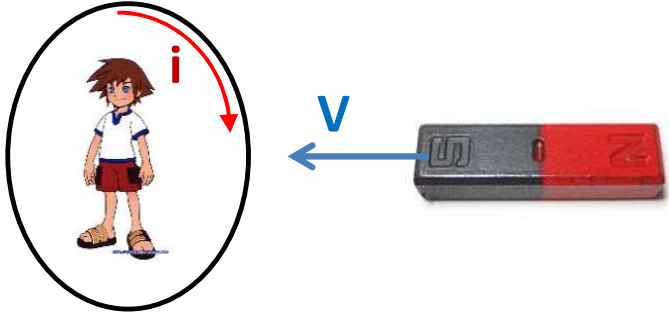
$$m (1\text{kg } \text{U}^{238}) \rightarrow E = 3 \cdot 10^{13} \text{ J} = 1 \text{ GW/anno} = 27 \text{ MW/giorno}$$

27'000 famiglie che consumano 1kW al giorno, per un anno di seguito.

Che fine hanno fatto le asimmetrie magneti/spire?



1. L'osservatore è solidale con la spira:



1) Muovo il magnete rispetto alla spira: nella spira passa una corrente i

$$i = \frac{f}{R}; \quad f = - \frac{d\phi(B)}{dt}$$

Il problema era che l'osservatore vedeva un campo magnetico B in movimento: ma anche i campi E, B, D, H... hanno le loro trasformazioni quando vengono visti da un sistema in moto rispetto a loro:

$$E_{y,z} = \gamma [E'_{y,z} \pm V_x B'_{z,y}] \quad \text{quindi il campo B viene visto come un campo elettrico (a riposo)}$$

$$B_{y,z} = \gamma [B'_{y,z} \mp \frac{V_x}{c^2} E'_{z,y}] \quad \dots \text{Un campo E come un campo magnetico (a riposo).}$$

E tutto torna, le due formule in realtà sono la stessa formula! 😊

Relatività Speciale – Ma è vero che tutto è relativo? No!



Sembra che tutto sia relativo...è vero, ma ci sono molte grandezze invarianti in tutti i sistemi inerziali.

- ❖ La velocità della luce nel vuoto è una costante universale: **$c=299\,792\,458\text{ m/s}$** (esatta).
- ❖ L'intervallo spazio-temporale: $ds^2 = c^2dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2)$ (sostituisce l'invarianza di dx e dt della fisica classica).
- ❖ La lunghezza **L_0** di un oggetto: la lunghezza di un oggetto misurato in un sistema in cui l'oggetto è a riposo è **L_0** ed è la **massima** lunghezza fra tutte quello che qualunque osservatore può misurare.
- ❖ La durata **t_0** di un evento: la durata di un evento misurata in un sistema in cui l'evento è a riposo è **t_0** ed è la **minima** durata fra tutte quello che qualunque osservatore può misurare.
- ❖ La massa **m** di un corpo: la massa di un corpo è una grandezza invariante.
- ❖ La combinazione Energia-impulso: **$E^2 - p^2c^2 = m^2c^4$** è una grandezza invariante
- ❖ La carica elettrica **q** è invariante.

Relatività Speciale – perché non ho relazioni simmetriche nelle trasformazioni di Lorentz?



La somma delle velocità:

$$v = \frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2 / c^2} \quad \text{dividiamo per } \gamma, \text{ e scriviamo } \beta = \frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1 \beta_2}$$

Le trasformazioni di Lorentz [$V/c = \beta$]

$$\begin{cases} x = \gamma \cdot (x' + Vt') & \rightarrow & x = \gamma x' + \gamma V t' = \gamma x' + \gamma V \frac{c}{c} t' = \gamma x' + \gamma \beta c t' \\ t = \gamma \cdot (t' + x' V / c^2) & \rightarrow & t = \gamma \cdot t' + \gamma x' V / c^2 \rightarrow ct = \gamma \cdot ct' + \gamma x' \beta \end{cases}$$

Chiamo $ct = w$ e $ct' = w'$

$$\begin{cases} x = \gamma x' + \gamma \beta w' \\ w = \gamma w' + \gamma \beta x' \end{cases}$$

Sono simmetriche!

Un problema molto difficile anche per A. Einstein



La Teoria della Relatività Generale

La Relatività Generale è, matematicamente, una teoria estremamente complessa.

Einstein disse che era il problema più complicato che avesse mai affrontato. Impiegò circa 10 anni a sviluppare tutta la Teoria.

La gravità crea vari problemi ad A. Einstein



1) La Relatività Speciale prevede che non possano esistere segnali che viaggiano a velocità maggiore di quella della luce.

Esiste inoltre la forza di Gravità, quella della legge di Gravitazione Universale di Newton:

$$\mathbf{F} = \mathbf{G} \frac{m_g M}{r^2}$$

Se supponiamo, per esempio, che il Sole si sposti di un po'...la Terra sentirà una forza diversa...ma quando? Istantaneamente? Secondo Newton sì.

NON È POSSIBILE...è un problema!

2) Alcuni fenomeni non trovano spiegazione: la precessione dell'orbita di Mercurio: le misure erano chiare, ma nessuna teoria poteva spiegare il fenomeno...

Nota: le misure delle orbite erano MOLTO precise, fin dall'antichità (→ Keplero, pdf)

Il cammino: massa inerziale e massa gravitazionale



❖ La legge che descrive la dinamica dei corpi in movimento è la seconda legge della dinamica:

$$\mathbf{F} = m_i \mathbf{a}$$

Dove m_i è la cosiddetta **massa inerziale**.

❖ La legge che descrive la forza gravitazionale è la legge di Gravitazione universale di Newton:

$$\mathbf{F} = G \frac{m_g M}{r^2}$$

Dove m_g è la cosiddetta **massa gravitazionale**.

❖ Galileo afferma che queste due masse sono uguali, e lo prova con alcuni esperimenti (poco precisi).

❖ Altri scienziati hanno ripetuto la misura. Ad oggi m_i e m_g sono risultate uguali entro una parte su 10^{15} (esperimento MICROSCOPE 2022).

Il principio di equivalenza nella più grande camera da vuoto del mondo

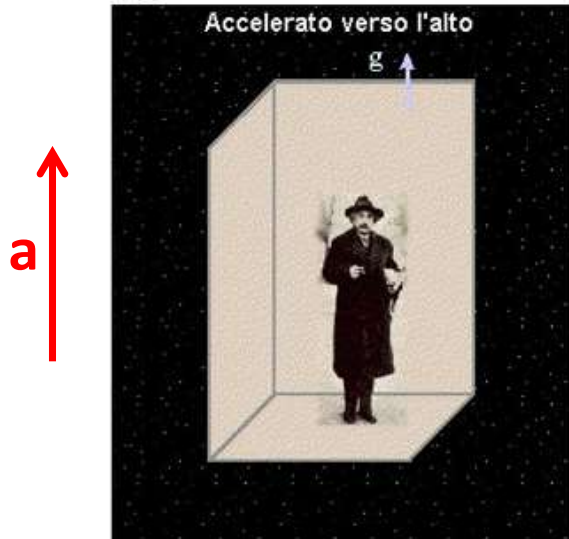




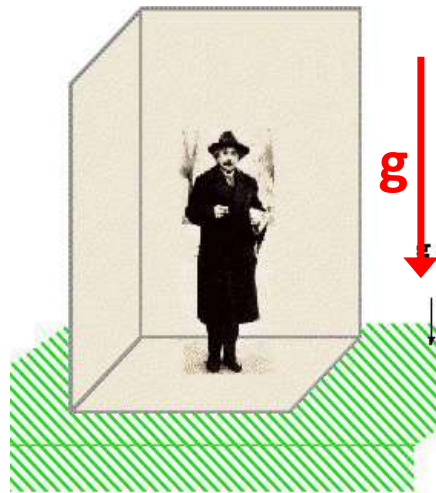
Einstein: massa inerziale = massa gravitazionale ? Sì, per principio

- ❖ Einstein fa qualcosa di più e di diverso: crea una nuova teoria della gravitazione in cui il punto di partenza è il principio dell'equivalenza fra massa inerziale e massa gravitazionale. Perché?
- ❖ Tutto parte da un'osservazione (Einstein 1907):
Cosa succede in un ascensore, fermo sulla Terra oppure in moto accelerato nello spazio?
...non posso distinguere i due casi!
- Analogamente per un corpo libero nello spazio e un corpo in caduta libera sulla Terra.

Ascensore accelerato nello Spazio



Ascensore fermo, sulla Terra



Attenzione: i due casi sono identici in una sola posizione, se mi spostassi g cambierebbe, quindi dovrei cambiare anche a .
L'indistinguibilità è locale

Il Principio di equivalenza di Einstein



❖ Einstein dice: non esiste modo di distinguere tra gli effetti di un campo gravitazionale uniforme o di un'accelerazione costante.

Quindi:

- 1) Le due masse, inerziale e gravitazionale, **DEVONO** essere uguali.
- 2) E' sempre possibile trovare un sistema (di riferimento) in cui gli effetti della forza di gravità siano identici a quelli di un'accelerazione costante **[localmente]**.
- 3) **Ma allora posso scrivere una legge di relatività per TUTTI i sistemi di riferimento, anche per quelli non inerziali. [vedi RG originale]**

Da questo punto parte Einstein per enunciare la:

Teoria della Relatività Generale

Risolverà tutti (?) i problemi legati alla gravità. **LEGGI**



Cosa dicevano Galilei e Newton:

- ❖ Esiste lo Spazio assoluto, esiste il Tempo assoluto. Lo spazio è **piatto**, cioè vale la geometria di Euclide. In questo spazio valgono le leggi della dinamica. Esiste la legge di gravitazione universale che spiega l'attrazione dei corpi dovuta alla loro massa.

Cosa dice la Relatività Speciale:

- ❖ Esiste lo Spazio-Tempo. Spazi e Tempi sono relativi, tutti i sistemi inerziali sono equivalenti (non posso distinguerli). Lo spazio è **piatto**, cioè vale la geometria di Euclide. La legge di gravitazione non entra nella Relatività Speciale.

Cosa dice la Relatività Generale:

- ❖ Le masse «**curvano**» lo spazio-tempo. Lo spazio-tempo non è **piatto**. I corpi si muovono seguendo le linee di universo di uno spazio curvo; non serve invocare la forza di gravità (povero Newton!). La relatività speciale continua a essere valida, ma viene estesa a sistemi accelerati, non inerziali...

Cosa è uno spazio “curvo”?



- ❖ In uno spazio piatto vale la geometria di Euclide:
 - ❖ Due rette parallele non si incontrano mai...
 - ❖ La somma degli angoli interni di un triangolo è 180° .
 - ❖ Il cammino più corto fra due punti è una retta.
- ❖ In uno spazio curvo non vale più la geometria di Euclide:
 - ❖ Due rette parallele si possono incontrare.
 - ❖ La somma degli angoli interni di un triangolo non è più 180° .
 - ❖ Il cammino più corto fra due punti è una curva.
 - ❖

Vediamo qualche esempio in uno spazio curvo in due dimensioni: una superficie sferica

Gli angoli interni di un triangolo (un esempio $a=89^{\circ}$ $b=70^{\circ}$ $c=70^{\circ}$ $a+b+c= 229^{\circ}$)

La distanza minima fra due punti (sfera)

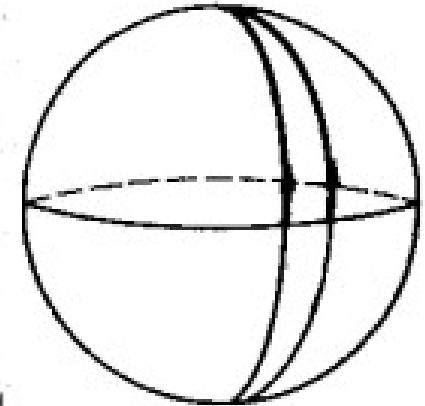
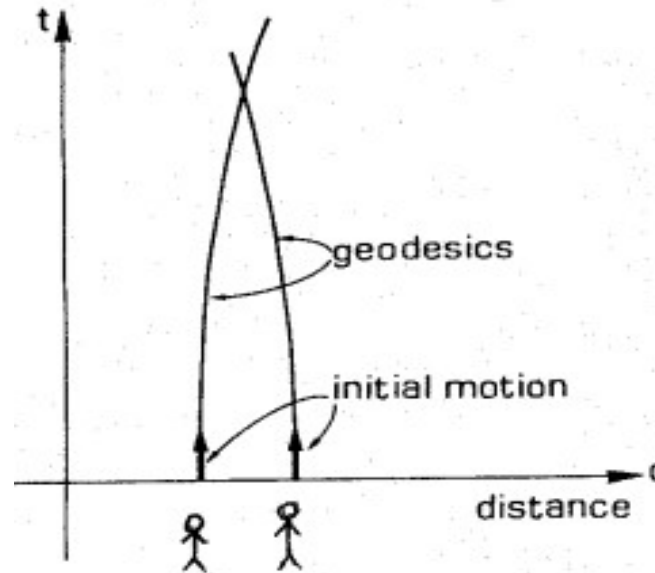
Se percorro 4 lati, facendo ogni volta un angolo di 90° , torno al punto di partenza?

Un nuovo concetto di spazio



❖ Consideriamo due persone che pensano di trovarsi in uno spazio piatto, e che si muovono «in linea retta»

❖ Misurano la loro distanza e vedono che questa diminuisce. Da qui concludono che esiste una forza che li attrae l'uno all'altro.



❖ Ma se li facciamo muovere ripetendo l'esperimento in uno **spazio curvo**, riusciranno a spiegare il loro avvicinamento senza dover introdurre nessuna forza esterna.

❖ Secondo la Relatività Generale, quindi, lo spazio-tempo è uno spazio curvo di dimensione 4 $[x, y, z, t]$. Le traiettorie di un corpo in presenza di massa sono le «**geodetiche**», che non sono necessariamente delle linee rette.

Geodetica: è una particolare curva che descrive localmente la traiettoria più breve fra punti di un particolare spazio. Nel piano le geodetiche sono le linee rette, su una sfera sono gli archi di cerchio massimo. Può essere intesa come il percorso che compirebbe una particella non accelerata.



Un nuovo concetto: lo spazio-tempo è curvato dalle masse

❖ Ma la forza di gravità dove va a finire?

La forza di gravità sparisce (è solo comodo usarla, spesso). Quello che succede è che lo spazio-tempo senza massa/energia (vuoto e noioso) è piatto.

Lo spazio-tempo in presenza di masse viene "curvato" dalle masse, che di conseguenza si muovono in uno spazio-tempo curvo "cadendo" le une verso le altre e muovendosi di conseguenza.

❖ La realtà fisica dello spazio-tempo è descritta da un'equazione che lega la presenza di materia/energia alla **metrica**, cioè alla geometria dello spazio-tempo curvo.

❖ La **metrica** è una funzione di quattro variabili indipendenti: (x, y, z, t) .

❖ La **materia dice allo spazio-tempo come «curvarsi»**, e a sua volta si muove nello spazio-tempo curvo.

L'equazione di Einstein:

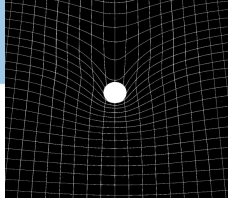
$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

spazio-tempo

materia

Attenzione! Einstein: «il mio più grosso errore»

Le conseguenze dell'equazione di Einstein



- ❖ Ciò che produce la curvatura dello spazio è la materia stessa.
- ❖ La curvatura determina a sua volta il moto della materia nello spazio.
- ❖ La distribuzione di materia e il suo moto non possono essere descritti indipendentemente dal campo gravitazionale da essi prodotti.

Effetti sullo spazio tempo:

Le lunghezze (radiali) e i tempi dipendono dalla presenza di masse «nelle vicinanze»:

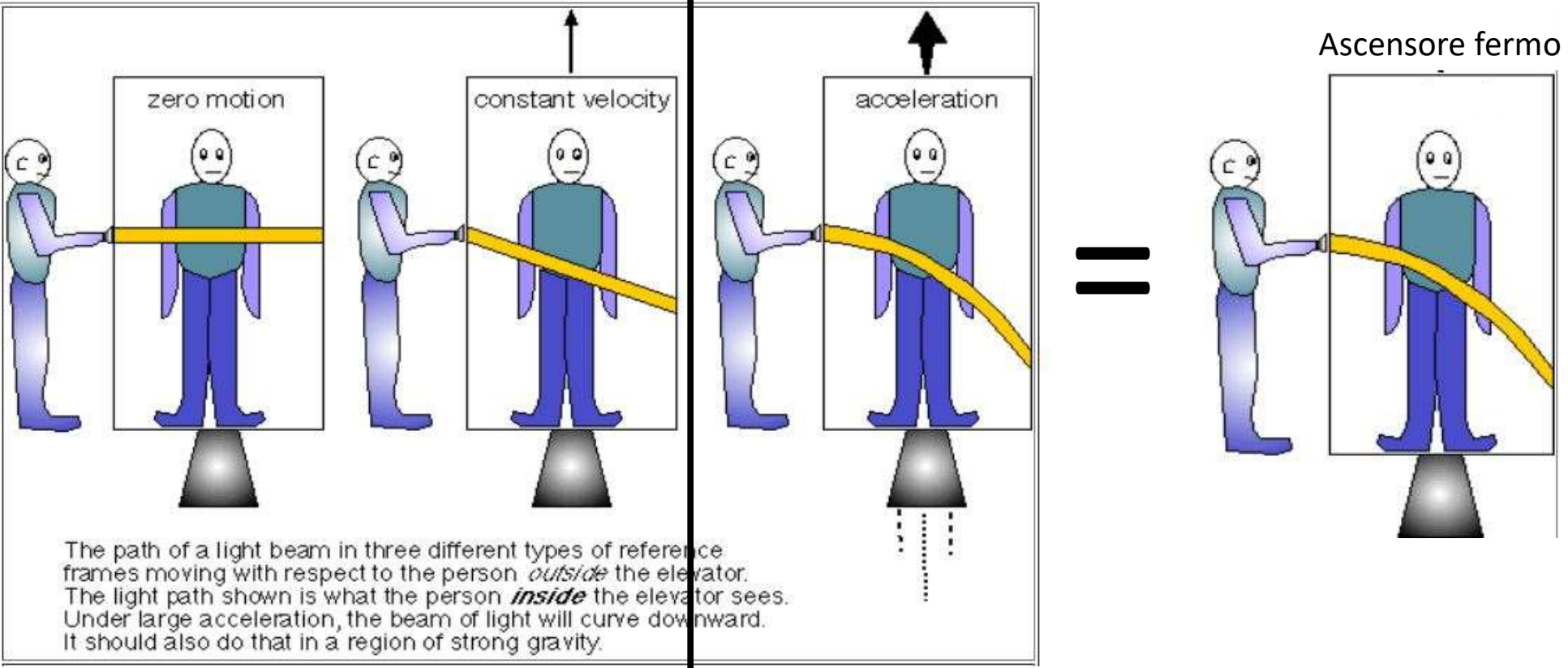
$$L(\mathbf{r}) = L_0 \sqrt{1 - \frac{2GM}{rc^2}} = L_0 \sqrt{1 - \frac{r_s}{r}} \quad \blacksquare \quad t(\mathbf{r}) = t_0 \sqrt{1 - \frac{2GM}{rc^2}} = t_0 \sqrt{1 - \frac{r_s}{r}}$$

$r_s = \frac{2GM_T}{c^2}$ = raggio di Schwarzschild - per la Terra: $r_s \cong 9 \text{ mm}$, il fattore r_s ci dà la scala degli effetti.

Le lunghezze L_0 e i tempi t_0 esistono solo all'infinito, o in assenza di altri corpi!
In pratica non si possono mai misurare esattamente.



Un altro esperimento mentale

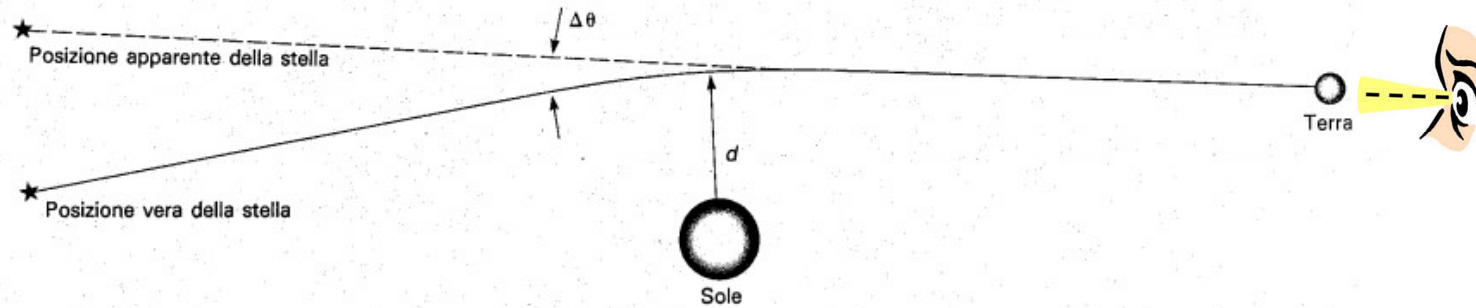


❖ Un raggio di luce, al pari di un oggetto dotato di massa, deve subire l'azione del campo gravitazionale, ed eventualmente esserne "incurvato".



Gli effetti sono visibili? Sì

❖ Un raggio di luce, al pari di un oggetto dotato di massa, deve subire l'azione del campo gravitazionale, ed eventualmente esserne "incurvato".



❖ La prima verifica si ebbe da parte di Sir A. Eddington nel 1919 dallo studio di un'eclisse solare.

❖ Si osservò una deflessione di circa 1.7 secondi d'arco (questo angolo corrisponde al diametro di una moneta vista dalla distanza circa 3 km).

❖ La teoria aveva la prima verifica sperimentale: la luce curva o «cade» in un campo gravitazionale.

IL FOTONE

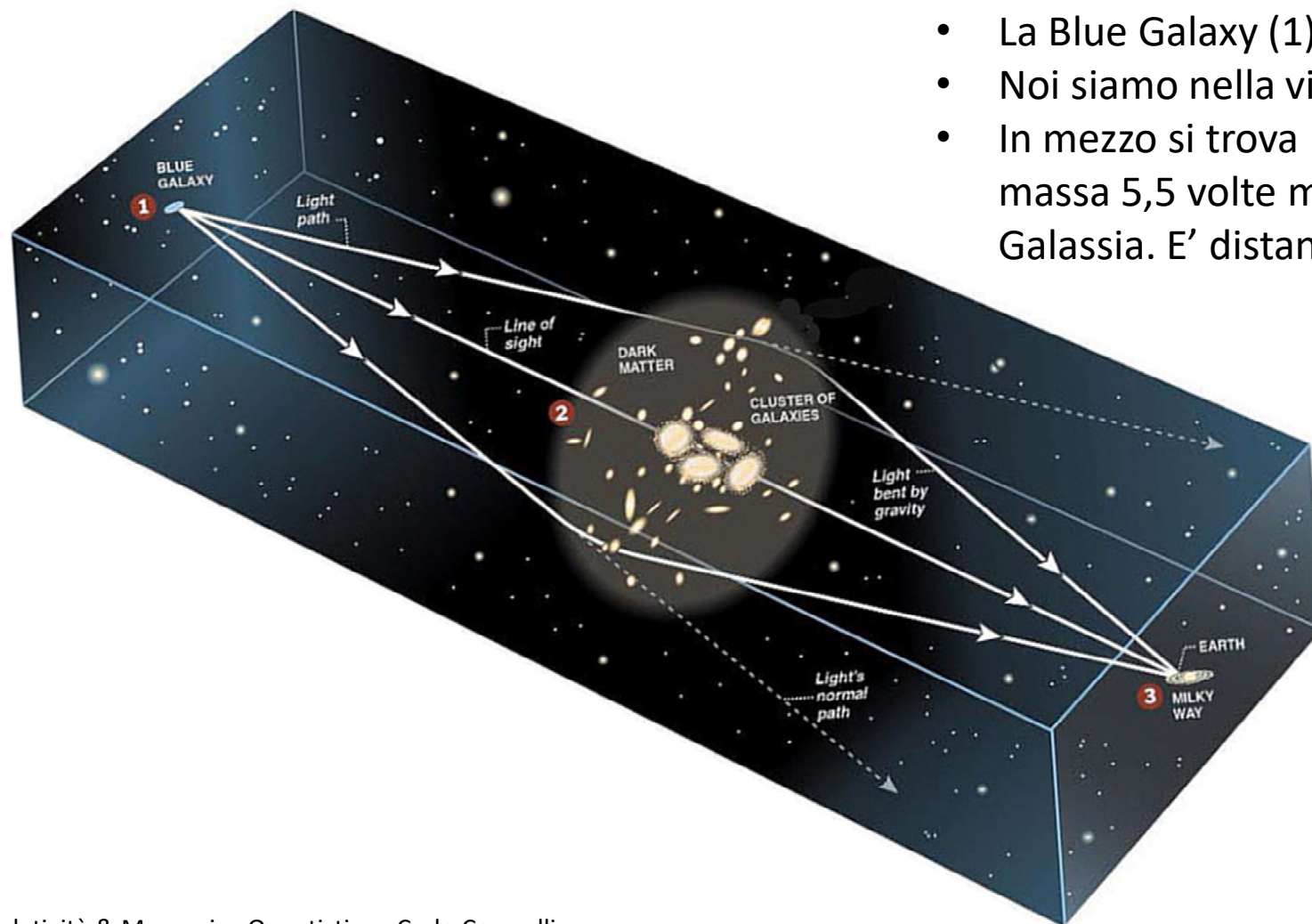
La massa equivalente

$$E = m_e c^2 = hf$$

$$\text{quindi: } m_e = \frac{E}{c^2} = \frac{hf}{c^2}$$

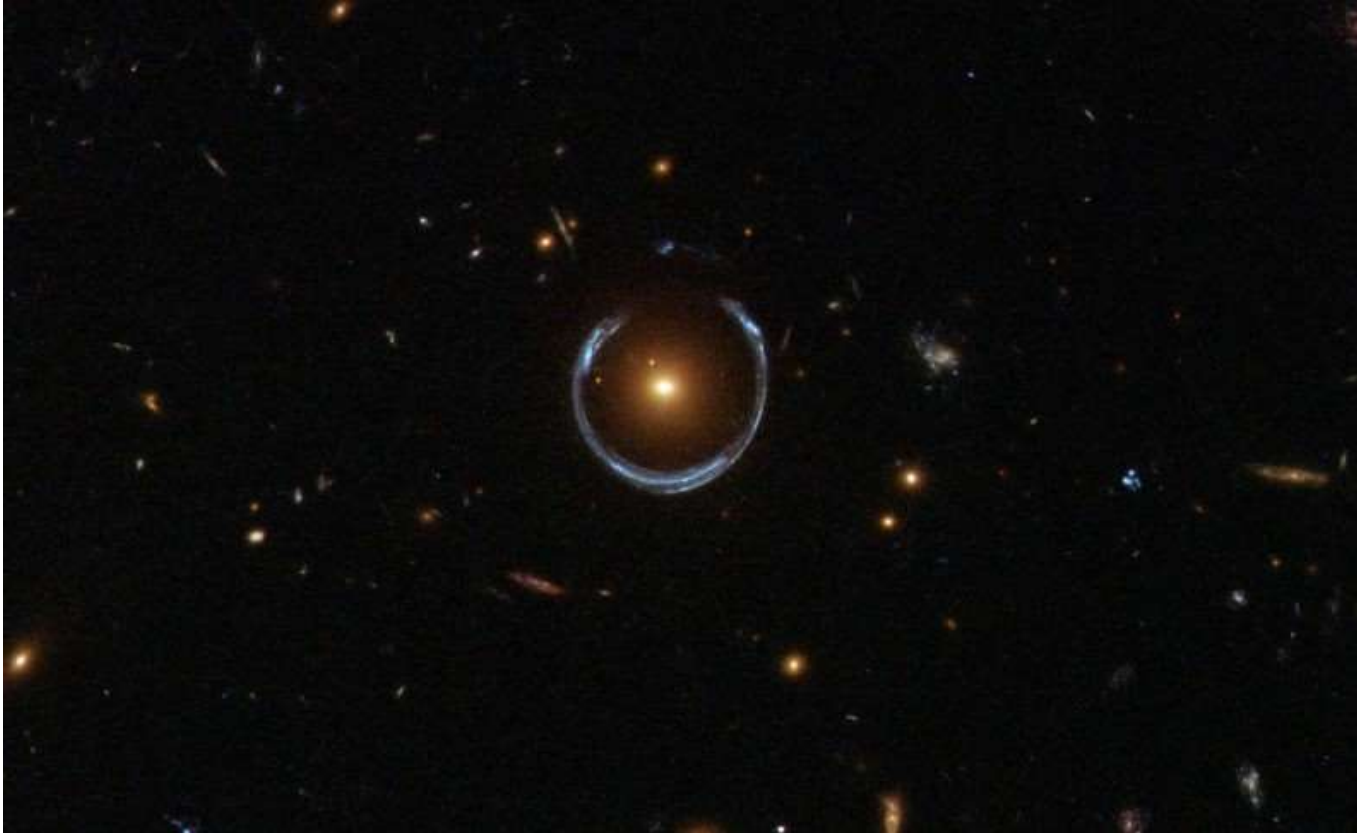
E' una massa convenzionale, non è una massa a riposo, il fotone non è mai a riposo.

Un effetto di curvatura galattica – 21 dicembre 2011



- La Blue Galaxy (1) dista 10,9 Miliardi di anni luce.
- Noi siamo nella via lattea (3), la nostra galassia.
- In mezzo si trova la Luminous Red Galaxy (2) ha una massa 5,5 volte maggiore di quella della nostra Galassia. E' distante 4,5 Miliardi di anni luce.

Un effetto di curvatura galattica – 21 dicembre 2011

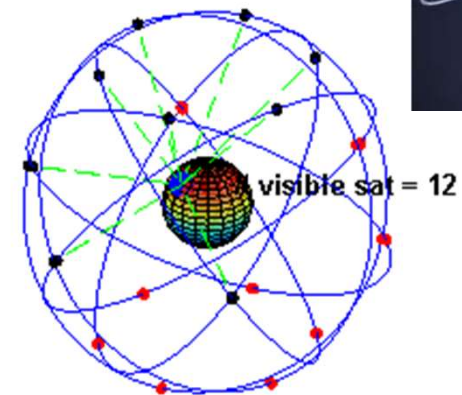


Questo è quello che si vede dalla nostra galassia (è una foto). I raggi della Blue Galaxy vengono curvati dalla lente gravitazionale della Red Galaxy.

Un effetto quotidiano: il GPS

I satelliti del GPS (3) inviano un raggio di onde e.m. verso il nostro ricevitore, un quarto satellite invia l'ora al nostro cellulare, dal ritardo fra emissione e ricezione si misura la distanza.

Combinando i dati di quattro satelliti si misura la posizione.



Ma gli orologi sui satelliti sono sottoposti alla forza di gravità, che è differente da quella sulla Terra. Quindi misurano un tempo differente da quello che misurerebbero sulla Terra.

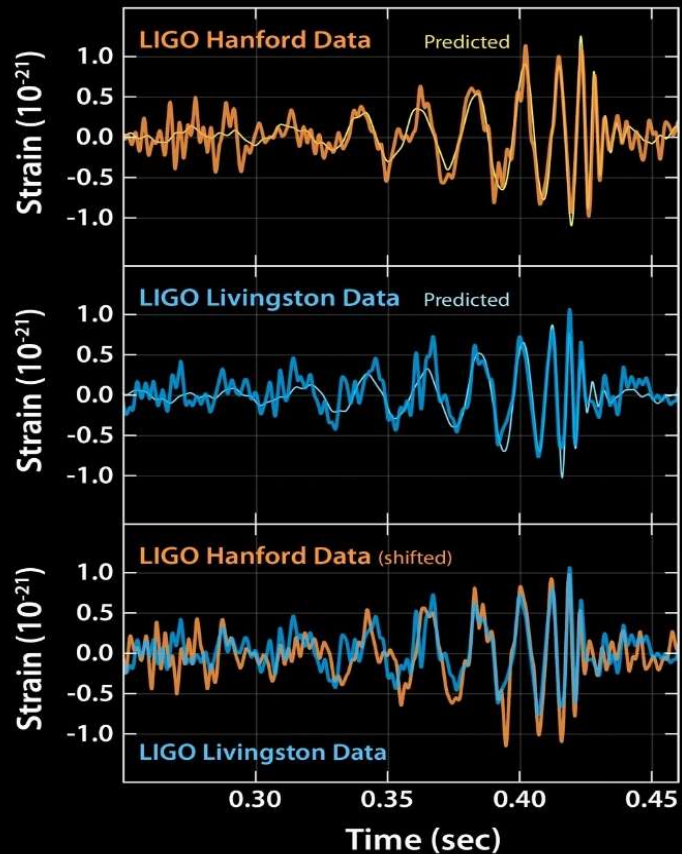
Come va il tempo «in presenza di gravità» $t(\mathbf{R}) \cong t_{\infty} \left(1 - \frac{R_0}{2R} \right)$ dove $R_0 = \frac{2GM}{c^2}$

Se ci mettiamo i vari dati...la massa e il raggio della Terra, l'altezza dei satelliti...

Arriviamo ad una correzione, su di un giorno, di circa $53 \mu\text{s}$...poi c'è la correzione della Relatività Speciale...tutti questi errori se non corretti, porterebbero ad un errore, nella posizione, di vari chilometri (circa 5 km al giorno).

E il GPS darebbe sempre un'indicazione sbagliata!!!

La prima osservazione diretta di un'onda gravitazionale



Il 14 settembre 2015 alle ore 9:50:45 i due rivelatori LIGO negli Usa hanno segnalato il passaggio di un'onda gravitazionale.

Lo strain misurato è stato $h = 1 \times 10^{-21}$ corrispondente ad uno spostamento massimo di uno dei bracci dell'intefremotero di $0,002 \text{ fm} = 2 \times 10^{-18} \text{ m}$

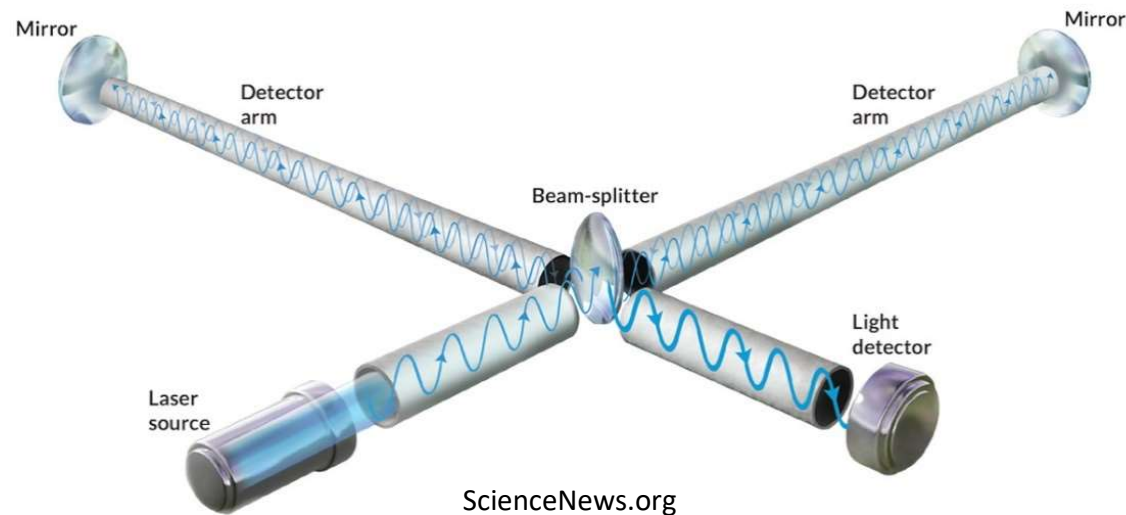
L'onda è stata probabilmente generata dalla collisione di due **buchi neri**, le cui masse erano **36 e 29 volte** maggiori di quella del Sole.

L'energia irradiata di circa $2,5\text{-}3,5 M_{\text{solari}}$

La collisione è avvenuta circa **1,3 miliardi** di anni fa.

I rivelatori interferometrici: L'esperimento Ligo-Virgo

Per osservare le onde gravitazionali si possono usare anche strumenti chiamati “**interferometri**”. Negli interferometri, due fasci di luce viaggiano in due tunnel perpendicolari e, riflessi da due specchi, tornano a sovrapporsi. Lo schema è identico a quello utilizzato da Michelson e Morley nel 1887 per misurare l’“Etere”.



Se la lunghezza di uno dei due tunnel cambia rispetto all’altro, la sovrapposizione dei due fasci luminosi produce una diversa figura di interferenza.

La rete di rivelatori nel 2007



H1- Hanford – Washington State



Virgo – Cascina (Pisa) – EGO site

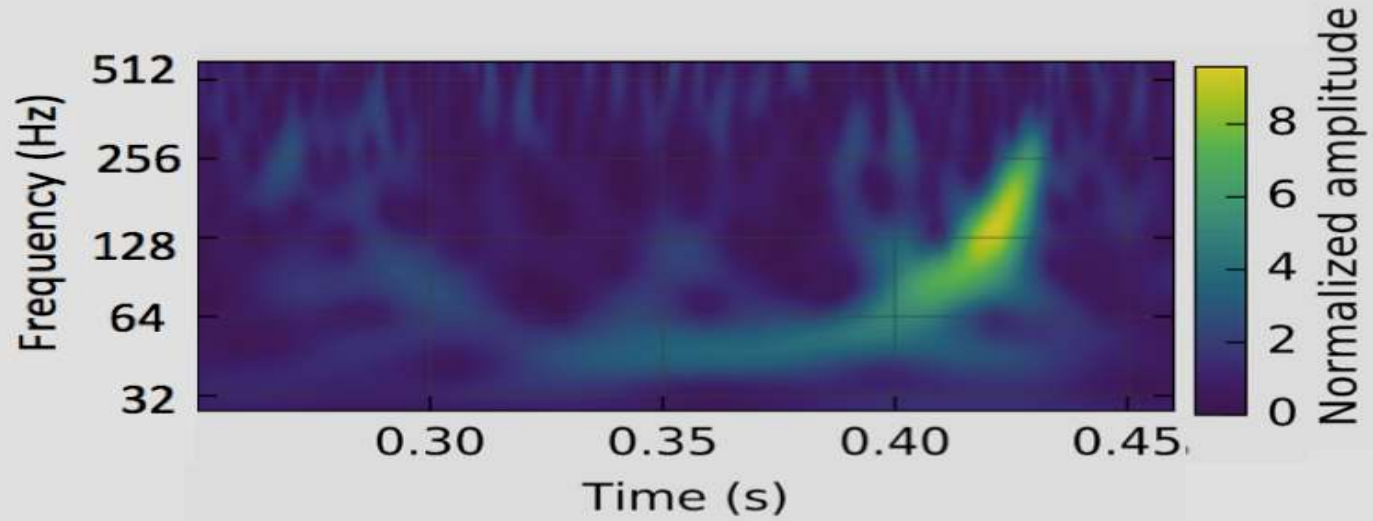


GEO600 – Hannover - Germany

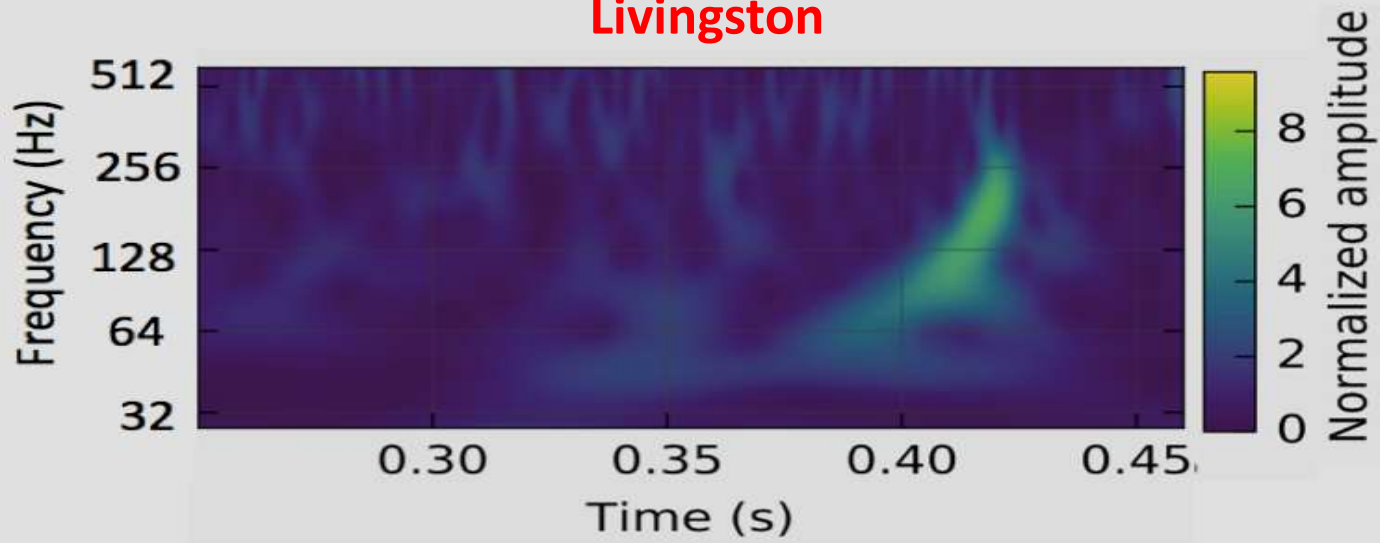


L1- Livingston – Louisiana State

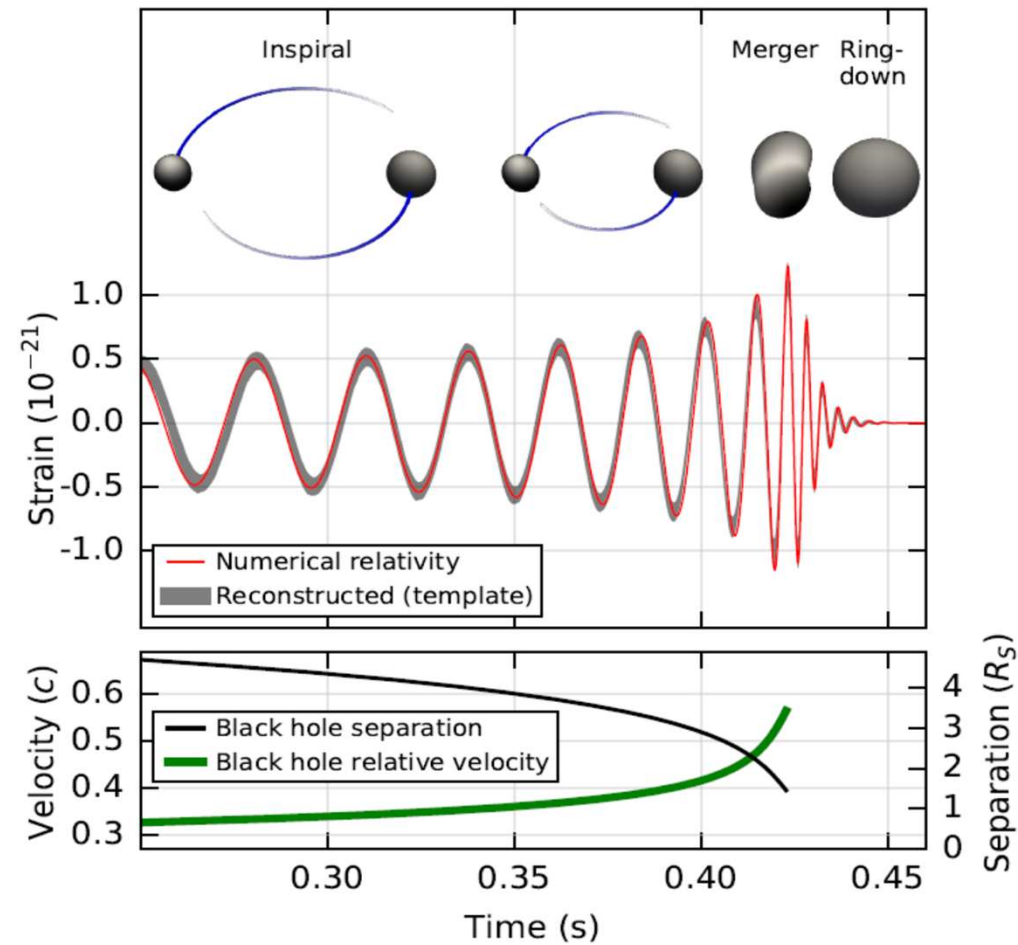
Hanford



Livingston



GW150914: stima dell'ampiezza del segnale



Parametri della sorgente del segnale

GW150914

Primary black hole mass	$36^{+5}_{-4} M_{\odot}$
Secondary black hole mass	$29^{+4}_{-4} M_{\odot}$
Final black hole mass	$62^{+4}_{-4} M_{\odot}$
Final black hole spin	$0.67^{+0.05}_{-0.07}$
Luminosity distance	$410^{+160}_{-180} \text{ Mpc}$
Source redshift, z	$0.09^{+0.03}_{-0.04}$

La prima osservazione diretta di un'onda gravitazionale: lo “stesso” strumento a distanza di più di 100 anni



- L'apparato sperimentale è concettualmente identico a quello di Michelson a Morley del 1887, allora un risultato “negativo” servì a corroborare quella che poi sarebbe stata la teoria della Relatività Speciale del 1905.
- Nel 2015 un apparato simile, tramite un risultato “positivo” ha fornito una prova diretta che corrobora la teoria della Relatività Generale del 1915.

E' un'ulteriore conferma della Teoria della Relatività Generale, questo strumento potente permette di “vedere” eventi avvenuti miliardi di anni fa dato che queste onde sono assorbite pochissimo dalla materia e possono viaggiare senza grandi perdite di energia. Può essere una finestra su quello che è successo nei primi istanti dell'universo.



E così A. Einstein con due articoli, ridefinendo lo spazio e il tempo, trovò la soluzione ad alcuni dei problemi che aveva la Fisica agli inizi del XX secolo. Ma ancora mancavano dei tasselli, ancora c'era qualcosa di inspiegabile. Serviva la Meccanica Quantistica (per cui Einstein prese il Nobel).